МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учебно-методическое объединение по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель Министра образования
Республики Беларусь
________________ А.Г. Баханович
(подпись)
____
(дата утверждения)
Регистрационный № _____

Математический анализ

Примерная учебная программа по учебной дисциплине
для специальности
6-05-0533-06 Математика

СОГЛАСОВАНО
Председатель Учебно-методического объединения по естественнонаучному образованию
________________ Д.М. Курлович
(подпись)
____
(дата)

СОГЛАСОВАНО
Начальник Главного управления профессионального образования Министерства образования Республики Беларусь
________________ С.Н. Пищов
(подпись)
____
(дата)

СОГЛАСОВАНО
Проректор по научно-методической работе Государственного учреждения образования ”Республиканский институт высшей школы“
________________И.В. Титович
(подпись)
____
(дата)

Эксперт-нормоконтролер
________________ ______________
(подпись) (И.О.Фамилия)
____
(дата)

Минск 2024

СОСТАВИТЕЛИ:

Н.В. Бровка, заведующий кафедрой теории функций учреждения образования «Белорусский государственный университет», доктор педагогических наук, профессор;
О.Б. Долгополова, доцент кафедры теории функций учреждения образования «Белорусский государственный университет», кандидат физико-математических наук, доцент;
В.Г. Кротов, профессор кафедры теории функций учреждения образования «Белорусский государственный университет», доктор физико-математических наук, профессор;
Т.С. Мардвилко, доцент кафедры теории функций учреждения образования «Белорусский государственный университет», кандидат физико-математических наук, доцент;
Н.Б. Яблонская, доцент кафедры общей математики и информатики учреждения образования «Белорусский государственный университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет» (протокол № 12 от 31.05.2023);
В.В. Гороховик, гл. научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа Института математики Национальной Академии Наук Республики Беларусь, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Национальной Академии наук Беларуси

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ПРИМЕРНОЙ:

Кафедрой теории функций учреждения образования «Белорусский государственный университет»
(протокол № 16 от 04.05.2023);

Научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский государственный университет»
(протокол № 9 от 29.06.2023);

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по естественно-научному образованию
(протокол № 7 от 19.05.2023)

Ответственный за редакцию: Кротов В.Г.

Ответственный за выпуск: Мардвилко Т.С.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

ХАРАКТЕРИСТИКА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Примерная учебная программа по учебной дисциплине «Математический анализ» разработана для студентов учреждений высшего образования в соответствии с требованиями образовательных стандартов общего и специального высшего образования и примерных учебных планов специальности:

6-05-0533-06 Математика.

Дисциплина «Математический анализ» является базовой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Дифференциальные уравнения», «Теория функций действительного переменного», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление». При изучении математического анализа студенты знакомятся с основами дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных. Основные понятия дифференциального и интегрального исчисления являются базовыми для освоения указанных выше математических дисциплин.

Воспитательное значение учебной дисциплины «Математический анализ» заключается в формировании у обучающихся математической культуры и научного мировоззрения; развитии исследовательских умений, аналитических способностей, креативности, необходимых для решения научных и практических задач; развитии познавательных способностей и активности: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности; формировании способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Изучение данной учебной дисциплины способствует созданию условий для формирования интеллектуально развитой личности обучающегося, которой присущи стремление к профессиональному совершенствованию, активному участию в экономической и социально-культурной жизни страны, гражданская ответственность и патриотизм.

ЦЕЛЬ, ЗАДАЧИ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель учебной дисциплины «Математический анализ» – создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики.

Образовательная цель: изложение основ дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Задачи учебной дисциплины «Математический анализ»:

1. Формирование у студентов понятия числа.
2. Изучение понятия предела и освоение этого понятия с целью практического использования при решении различных задач математики;
3. Изучение основ дифференциального и интегрального исчисления;
4. Использование основ дифференциального и интегрального исчисления при решении задач математики, механики, математической физики.

ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОСВОЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Освоение учебной дисциплины «Математический анализ» должно обеспечить формирование следующих универсальных и базовых профессиональных компетенций:

универсальная: владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;

базовая профессиональная: использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач математического анализа;

– новейшие достижения в области математического анализа и их приложения в задачах естествознания;

уметь:

– использовать основные результаты математического анализа в практической деятельности;

– использовать теоретические и практические навыки применения дифференциального и интегрального исчисления в математике;

владеть:

– основными методами интегрирования и дифференцирования функций, рядов и интегралов;

– методами доказательств и аналитического исследования функций, рядов и интегралов на непрерывность, сходимость, равномерную сходимость;

– навыками самообразования и способами использования аппарата математического анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Примерная учебная программа рассчитана на 800 учебных часов, в том числе 492 аудиторных часа. Примерное распределение аудиторных часов по видам занятий: лекции – 246 часов, лабораторные занятия – 246 часов.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Наименование темы	Всего аудиторных часов	Лекции	Лабораторные занятия
Тема 1. Элементы теории множеств	30	16	14
Тема 2. Теория пределов	64	28	36
Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	50	28	22
Тема 4. Интегральное исчисление функций одной переменной	72	32	40
Тема 5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных	64	36	28
Тема 6. Теория рядов	110	54	56
Тема 7. Интегралы, зависящие от параметра	34	18	16
Тема 8. Интеграл Римана в R^d	34	14	20
Тема 9. Криволинейные интегралы и формула Грина	20	12	8
Тема 10. Поверхностные интегралы. Теория поля	14	8	6

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Элементы теории множеств

1.1 Правила логического вывода. Множества, отношения, функции

Высказывания. Кванторы общности и существования. Множества и операции над ними. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения. Понятие отображения (функции). Сюръекция, инъекция, биекция. Обратное отображение. Отношение эквивалентности, рефлексивности, симметричности, транзитивности.

1.2 Множество действительных чисел

Аксиоматика и модели множества действительных чисел. Важнейшие подмножества. Границы числовых множеств. Ограниченные множества. Точные границы множества. Теорема Дедекинда.

Принцип Архимеда. Позиционные системы счисления.

Понятие о мощности множества, основные мощности. Теорема Кантора о несчетности континуума.

Тема 2. Теория пределов

2.1 Предел последовательности

Ограниченные последовательности. Предел последовательности и его свойства. Предел и операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Число Эйлера.

Различные формы полноты множества действительных чисел (лемма Бореля-Лебега о покрытиях, лемма Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши сходимости последовательности. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их свойства.

2.2 Предел функции

Определение предела функции по Коши и по Гейне. Общие свойства предела функции. Предел и операции над функциями. Предел функции и неравенства. Замечательные пределы.

Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Символы Харди и Ландау. Критерий Коши существования предела функции. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

2.3 Непрерывные функции

Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (ограниченность, сохранение знака) и арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность композиции.

Теоремы Вейерштрасса и теоремы Больцано-Коши. Теорема о непрерывном образе отрезка. Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Колебание функции.

Критерий глобальной непрерывности монотонной функции и критерий взаимной однозначности непрерывной функции. Классификация разрывов функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.

Непрерывность элементарных функций и замечательные пределы.

Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

3.1 Дифференцируемые функции

Задачи, приводящие к понятию производной. Производная и дифференцируемость. Дифференциал.

Производные элементарных функций. Правила дифференцирования. Связь непрерывности и дифференцируемости. Связь дифференцирования с операциями над функциями. Производная обратной функции. Производные высших порядков.

Экстремумы функции. Лемма Ферма, основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши). Правила Лопиталя.

Формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа и Коши. Разложение элементарных функций.

Монотонность и знак производной. Достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума.

Выпуклые функции и их свойства, условия выпуклости. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения.

Тема 4. Интегральное исчисление функций одной переменной

4.1 Неопределенный интеграл

Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций. Интегрирование по частям и замена переменной.

Интегрирование рациональных функций, интегрирование некоторых иррациональностей.

4.2 Определенный интеграл Римана

Примеры задач, приводящих к понятию интеграла. Определение интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости.

Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций.

Свойства определенного интеграла. Теоремы о среднем значении.

Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Формула Тейлора с остатком в виде интеграла.

4.3 Приложения определенного интеграла

Длина пространственной кривой, площадь криволинейной трапеции, площадь поверхности вращения, объем тела вращения.

4.4 Несобственные интегралы

Несобственные интегралы и их свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле. Главное значение по Коши. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная и условная сходимость. Признак сравнения для интегралов от положительных функций. Признак Абеля-Дирихле для условной сходимости.

Тема 5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

5.1 Метрические пространства

Метрика, шары, открытые множества. Внутренние точки множества, внутренность. Предельные и изолированные точки множества. Замкнутые множества, замыкание, граница. Теорема двойственности открытых и замкнутых множеств. Компактные и связные множества.

Предел последовательности и функции в метрическом пространстве. Непрерывность функции на метрическом пространстве. Глобальный критерий непрерывности. Ограниченные множества. Последовательность Коши, полнота метрического пространства. Замкнутые шары, теорема Кантора о вложенных замкнутых шарах.

Евклидово пространство: скалярное произведение и его свойства, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, норма, координатная сходимость, полнота, важнейшие подмножества. Теорема Гейне-Бореля.

Непрерывные функции на метрических пространствах. Теоремы о непрерывном образе компакта и связного множества. Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

5.2 Дифференцируемые функции многих переменных

Линейные формы на R^d, гиперплоскость, общий вид линейной формы. Дифференцируемость, производная и ее свойства. Формула Лагранжа.

Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл. Частные производные высших порядков. Теорема Шварца.

Полином Тейлора, формула Тейлора.

Квадратичные формы и их матрицы. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра. Локальные экстремумы функции. Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции. Достаточное условие экстремума.

5.3 Дифференцируемые векторные функции

Векторные функции, компоненты. Линейные отображений из R^n в R^m. Дифференцируемые векторные функции. Свойства производной и связь с производными компонент. Матрица Якоби. Производная композиции.

Гомеоморфизм. Теорема Брауера. Теорема об обратной функции. Теорема о неявной функции. Формулы для определения производных неявной функции.

Тема 6. Теория рядов

6.1 Числовые ряды

Ряд, слагаемые ряда, частные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Остатки ряда, связь сходимости остатков со сходимостью ряда. Операции над сходящимися рядами. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши.

Положительные ряды, критерий сходимости. Признак сравнения и его различные формы. Признак Коши. Теорема Куммера. Признаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса. Интегральный признак Коши.

Абсолютная и условная сходимость, связь между ними. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Ряды Лейбница.

Ассоциативность и коммутативность в теории рядов. Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

6.2 Функциональные последовательности и ряды

Равномерная сходимость, критерий Коши. Теорема о перестановке предельных переходов. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость суммы ряда. Теорема Дини. Степенные ряды.

Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами.

6.3 Ряды Фурье

Тригонометрическая система, ряды Фурье. Интегральные представления для сумм Фурье.

Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации. Условия сходимости ряда Фурье в точке. Признак Дини-Липшица равномерной сходимости рядов Фурье. Теорема Дирихле-Жордана.

Тема 7. Интегралы, зависящие от параметра

7.1. Интегралы, зависящие от параметра

Элементарная теория. Несобственные интегралы от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Интеграл вероятностей и интеграл Дирихле. Гамма- и бета-функции Эйлера.

Тема 8. Интеграл Римана в R^d

8.1. Мера Жордана в R^d

Построение меры Жордана на евклидовых пространствах. Критерии измеримости. Примеры: площадь криволинейной трапеции, площадь круга, число пи, неизмеримое по Жордану множество.

Свойства меры Жордана (монотонность, аддитивность, субаддитивность).

8.2. Интеграл Римана в R^d

Определение интеграла Римана на множестве, измеримом по Жордану. Необходимое условие интегрируемости. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций. Критерий Лебега.

Свойства интеграла Римана: интегрируемость на подмножестве, аддитивность, линейность, монотонность. Неравенства для интеграла. Мера декартова произведения измеримых множеств. Теорема об интеграле по декартовому произведению множеств (теорема Фубини) и ее следствия.

Замена переменной в интеграле Римана. Примеры.

Тема 9. Криволинейные интегралы и формула Грина

9.1. Функции ограниченной вариации

Функции ограниченной вариации. Аддитивность и непрерывность вариации. Теорема Жордана. Спрямляемый путь и его длина. Критерий Жордана спрямляемости.

9.2. Интеграл Римана-Стилтьеса

Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства (линейность, аддитивность, формула интегрировании по частям). Условия существования интеграла Стилтьеса, оценка интеграла. Формулы для вычисления с помощью интеграла Римана.

9.3. Криволинейные интегралы

Интегралы вдоль путей. Жордаовы кривые и контуры, их праараметризации и ориентация. Натуральная параметризация. Интегралы по жордановым кривым.

9.4. Формула Грина

Формула Грина. Односвязные области. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла. Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Первообразная функции многих переменных.

Тема 10. Поверхностные интегралы. Теория поля

10.1. Параметрические поверхности

Параметрические поверхности и параметризации. Площадь поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности, ориентация. Поверхности с краем.

10.2. Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы первого и второго рода и их приложения.

10.3. Формула Стокса

Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского.

10.4. Теория поля

Теория поля. Потециальные и соленоидальные поля.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1 Зорич, В. А. Математический анализ: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика и направлениям 01.03.01 Математика, 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 02.03.01 Математика и компьютерные науки : в 2 ч. / В. А. Зорич. - Изд. 10-е, испр. - Москва : МЦНМО, 2020.

2 Кротов, В. Г. Математический анализ : учеб. пособие для студ. уво по математическим спец. / В. Г. Кротов ; БГУ. - Минск : БГУ, 2017. - 375 с. – URL:http://elib.bsu.by/handle/123456789/191394.

3 Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие [для студентов физических и механико-математических специальностей вузов] / Б. П. Демидович. - Изд. 24-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 623 с. – URL: https://reader.lanbook.com/book/332675.

4 Математический анализ. Задачи и упражнения : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям : в 3 ч. – Минск : Вышэйшая школа, 2022. (Для студентов учреждений высшего образования). Ч. 1 / [И. Л. Васильев и др.]. – 2022. – 293 с.

5 Математический анализ. Задачи и упражнения : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям : в 3 ч. – Минск : Вышэйшая школа, 2023. (Для студентов учреждений высшего образования). Ч. 2 / [С. А. Бондарев и др.]. – 2023. – 355 с.

6 Бровка, Н. В. Практикум по математическому анализу упражнения : учебное пособие : в 3 ч. Ч. 1 / Н. В. Бровка, А. В. Ляцкая, А. П. Карпова – Минск : БГУ, 2023. – 455 с. – (Классическое университетское издание). – URL:https://elib.bsu.by/handle/123456789/303294.

Перечень дополнительной литературы

7 Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2000.

8 С. М. Никольский. Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука. 1990 и другие издания.

9 Э. И. Зверович. Вещественный и комплексный анализ. Т. 1–6. Минск: Вышэйшая школа, 2008.

10 Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. М.: Наука. 2001 и другие издания.

11 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Диффе-

ренциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды : Учебник. – 5-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 444 с.
12 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ : Учебник. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 467 с.
13 Сборник задач по математическому анализу /Под ред. Л. Д. Кудрявцева, М.: Наука, Т. 1. – 1984, Т. 2. – 1986, Т. 3 – 1994 и другие издания.
14 В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. Математический анализ. М.: Наука, 1985 и другие издания.
15 А. М. Тер-Крикоров, И. И. Шабунин. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.
16 У. Рудин. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976 и другие издания.
17 Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1978.
18 Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЩАЮЩИХСЯ

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Математический анализ» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, экзамену, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ КОМПЕТЕНЦИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Перечень рекомендуемых средств диагностики:

- Контрольная работа.
- Коллоквиум.

Формой текущей аттестации учебными планами предусмотрены зачет и экзамен в каждом из 1, 2, 3 и 4 семестров.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Формирование оценки текущей успеваемости: отметка текущей успеваемости представляет собой среднеарифметическую величину отметок по всем формам текущего контроля знаний по учебной дисциплине.

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ МЕТОДЫ (ТЕХНОЛОГИИ) ОБУЧЕНИЯ

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

– освоение содержание образования через решения практических задач;

– приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

– ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

– использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ТЕМ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Элементы теории множеств. Введение в математический анализ.
2. Теория пределов
3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.
4. Интегральное исчисление функций одной переменной.
5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

6 Теория рядов.

7. Интегралы, зависящие от параметра .
8. Интеграл Римана в R^d.
9. Криволинейные интегралы и формула Грина.
10. Поверхностные интегралы. Теория поля.