МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учебно-методическое объединение по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель Министра
образования Республики Беларусь
________________А.Г.Баханович
____

Регистрационный № _____

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Примерная учебная программа по учебной дисциплине
для специальности
6-05-0533-06 Математика**

СОГЛАСОВАНО
Председатель Учебно-методического
объединения по естественнонаучному
образованию
________________ Д.М.Курлович
____

СОГЛАСОВАНО
Начальник Главного управления
профессионального образования
Министерства образования
Республики Беларусь
________________ С.Н.Пищов
____

СОГЛАСОВАНО
Проректор по научно-методической
работе Государственного учреждения
образования «Республиканский
институт высшей школы»
________________ И.В.Титович
____

Эксперт-нормоконтролер
____
____

Минск 2024

СОСТАВИТЕЛЬ:
В.И. Громак, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
Кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» (протокол № 10 от 27.05.2024);

Иван Васильевич Белько, профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет», доктор физико-математических наук, профессор

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ПРИМЕРНОЙ:
Кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета
(протокол № 12 от 25.04.2024)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 9 от 28.06.2024)

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по естественнонаучному образованию
(протокол № 1 от 2.09.2024)

Ответственный за редакцию: В.И. Громак
Ответственный за выпуск: В.И. Громак

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Примерная учебная программа по учебной дисциплине «Дифференциальные уравнения» разработана для учреждений высшего образования Республики Беларусь в соответствии с требованиями образовательного стандарта общего высшего образования по специальности 6-05-0533-06 «Математика».

Цель учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения» – формирование знаний и практических навыков по эффективному использованию основных методов теории дифференциальных уравнений.

Задачи учебной дисциплины:

1. Приобретение студентами знаний в области теории дифференциальных уравнений.
2. Приобретение практических навыков решения математических задач, построения и анализа математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями.

В системе подготовки специалиста с высшим образованием учебная дисциплина относится к модулю «Дифференциальные уравнения» государственного компонента.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных связей и программ по дисциплинам: «Математический анализ».

Освоение учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения» должно обеспечить формирование следующей базовой профессиональной компетенции:

Строить и анализировать дифференциальные модели реально происходящих явлений и процессов.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– элементарные приемы интегрирования;
– постановку задачи Коши;
– теоремы существования и единственности;
– основные понятия и теоремы общей теории систем дифференциальных уравнений;
– основные понятия и теоремы теории устойчивости по Ляпунову;

уметь:

– решать основные типы уравнений первого порядка;
– ставить начальные и краевые задачи, решать вопросы существования и единственности решения начальных задач;
– решать линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами;
– применять основные теоремы второго метода Ляпунова для решения вопросов устойчивости движения, определять типы особых точек автономных систем на плоскости;

иметь навык:

– владения основными приёмами построения дифференциальных моделей реально происходящих явлений и процессов.

В рамках образовательного процесса по данной учебной дисциплине студент должен приобрести не только теоретические и практические знания, умения и навыки по специальности, но и развить свой ценностно-личностный, духовный потенциал, сформировать качества патриота и гражданина, готового к активному участию в экономической, производственной, социально-культурной и общественной жизни страны.

Всего на изучение учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения» отведено 240 часов, в том числе 140 аудиторных часов. Количество аудиторных часов распределяется следующим образом: лекции – 70 часов, практические занятия – 70 часов.

Рекомендуемые форма промежуточной аттестации – зачет и экзамен.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п/п	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов		
		Всего	Лекции	Практические занятия
1	Введение в теорию дифференциальных уравнений	4	2	2
2	Дифференциальные уравнения первого порядка	32	16	16
3	Дифференциальные уравнения высших порядков	8	4	4
4	Нормальные системы дифференциальных уравнений. Вопросы существования решений	12	6	6
5	Нормальные системы дифференциальных уравнений. Общие свойства решений систем дифференциальных уравнений	8	4	4
6	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка	8	4	4
7	Линейные дифференциальные уравнения	28	14	14
8	Линейные дифференциальные системы	24	12	12
9	Устойчивость по Ляпунову решений дифференциальных уравнений	8	4	4
10	Автономные системы дифференциальных уравнений	8	4	4
	Всего	**140**	**70**	**70**

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение в теорию дифференциальных уравнений

Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Простейшие математические модели, описывающие дифференциальные уравнения.

Тема 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Поле направлений. Изоклины. Решения. Интегральные кривые. Автономные системы. Особые точки. Фазовое пространство. Векторное поле. Траектории. Интеграл. Задача Коши. Теорема существования и единственности.

Элементарные приѐмы интегрирования: дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, линейные, Бернулли, Риккати, в полных дифференциалах и приводящиеся к ним. Интегрирующий множитель. Специальные классы интегрирующих множителей. Существование и общий вид интегрирующего множителя.

ОДУ первого порядка, не разрешѐнные относительно производной. Решение. Задача Коши. Теорема существования и единственности. С- и Р-дискриминантные кривые. Неполные уравнения. Общий метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Тема 3. Дифференциальные уравнения высших порядков

Общие понятия. Решение. Задача Коши. Связь между уравнением n-го порядка и нормальной системой. Методы понижения порядка уравнения.

Тема 4. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Вопросы существования решений

Теоремы существования и единственности решения для одного уравнения первого порядка и для системы дифференциальных уравнений. Метод последовательных приближений. Метод сжатых отображений. Продолжение решений.

Теоремы существования и единственности для линейной системы и линейного уравнения n-го порядка. Голоморфные функции и мажоранты. Теоремы существования голоморфного решения задачи Коши

Тема 5. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Общие свойства решений систем дифференциальных уравнений

Непрерывная зависимость решений от начальных данных и параметров. Дифференцируемость решения по параметру (без доказательства). Уравнение в вариациях. Понятие о методе малого параметра.

Системы в нормальной и симметрической формах. Решение. Задача Коши. интеграл. Независимые интегралы. Теорема о числе независимых интегралов. Существование полной системы первых интегралов для решения системы.

Тема 6. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка и его связь с системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Структура общего решения. Начальная задача Коши.

Квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка. Характеристики и интегральные поверхности. Теорема существования и единственности решения задача Коши (в случае двух независимых переменных) (без доказательства.). Системы дифференциальных уравнений в частных производных. Уравнение Пфаффа.

Тема 7. Линейные дифференциальные уравнения

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений. Линейная зависимость и независимость функций. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Теорема об общем решении. Формула Остроградского-Лиувилля.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных. Метод Коши.

Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида – квазиполиномом.

Линейные уравнения второго порядка. Теорема о каноническом виде. Теоремы Штурма о нулях решений. Понятие о краевых задачах.

Линейные дифференциальные уравнения с голоморфными коэффициентами. Обобщѐнные степенные ряды. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений при помощи степенных и обобщённых степенных рядов. Уравнение Эйри и Бесселя. Функции Бесселя.

Тема 8. Линейные дифференциальные системы

Линейные однородные системы дифференциальных уравнений. Свойства решений. Линейная зависимость и независимость вектор-функций. Формула Остроградского-Лиувилля. Фундаментальная система решений. Фундаментальная матрица. Структура общего решения линейной однородной системы.

Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных.

Экспоненциальная функция матричного аргумента. Теорема Лаппо-Данилевского. Матричный метод интегрирования линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Структура фундаментальной матрицы. Метод Эйлера. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Решение неоднородной системы с правой частью специального вида.

Тема 9. Устойчивость по Ляпунову решений дифференциальных уравнений

Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Критерий асимптотической устойчивости нулевого решения линейных автономных систем и уравнения n-го порядка. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Тема 10. Автономные системы дифференциальных уравнений

Автономные системы. Свойства решений. Фазовые портреты линейной автономной системы двух уравнений. Особые точки: узел, седло, фокус, центр. Понятие предельного цикла.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Бибиков, Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / Ю.Н. Бибиков. - Изд. 2-е, стер. - Санкт-Петербург; Москва ; Краснодар : Лань, 2023. - 303 с.
2. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения: учебник для физических и физико-математических факультетов университетов / Л.Э. Эльсгольц. - Изд. стер. - Москва: URSS, 2023. - 309 с.
3. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: [более 1400 задач с ответами] / А.Ф. Филиппов. - Изд. 9-е. - Москва: URSS: ЛЕНАНД, 2022. - 239 с.
4. Егоров А. И. Обновленный курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие для вузов / Егоров А.И. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2024. - 472 с.

Дополнительная литература

1. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по математическим спец. / В.В. Амелькин. - Минск: БГУ, 2012. - 288 с.
2. Прохорова, Р.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студ. УВО по математическим спец. / Р.А. Прохорова; БГУ. - Минск: БГУ, 2017.
3. Берёзкина, Н.С. Дифференциальные и интегральные уравнения. Тесты: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим и физическим специальностям: в 2 ч. / Н.С. Берёзкина, А.А. Гринь, В.С. Немец. - Минск: РИВШ, 2021. - Ч. 1. - 2021. - 307 с.
4. Берёзкина, Н.С. Дифференциальные и интегральные уравнения. Тесты: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим и физическим специальностям: в 2 ч. / Н.С. Берёзкина, А.А. Гринь, В.С. Немец. - Минск: РИВШ, 2021. - Ч. 2. - 2021. - 322 с.
5. Богданов, Ю.С. Курс дифференциальных уравнений: Учеб. пособие для студ. математич. и физич. спец. высш. учеб. завед. / Ю.С. Богданов, С.А. Мазаник, Ю.Б. Сыроид. - Мн.: Унiверсiтэцкае, 1996.
6. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Дифференциальные уравнения: учеб.-метод. пособие для спец. I ступени высш. образования / [авт.: В.В. Цегельник и др.]; М-во образования Республики Беларусь, УО "БГУИР", Фак. компьютерных систем и сетей, Каф. высшей математики. - Минск: БГУИР, 2018.
7. Еругин, Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. - Изд. 3-е, перераб. и доп. - Минск: Наука и техника, 1979.

8. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учебник для мех.-мат. спец. ун-тов / Н.М. Матвеев. - Изд. 4-е, испр. и доп. - Минск: Вышэйшая школа, 1974.
9. Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 7-е изд., доп. - СПб.: Лань, 2002.
10. Самойленко, А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пособие для студ. вузов / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. - Изд. 2-е, перераб. - Москва: Высшая школа, 1989.
11. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений: учебник для гос. ун-тов. - Изд. 6-е. - Москва: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1953.
12. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Учебник для физ. и физ.-мат. фак. ун-тов / Л.Э. Эльсгольц. - 5-е изд. - М.: УРСС, 2002.
13. Мартынов, И.П. Дифференциальные уравнения и системы Пенлеве типа / И.П. Мартынов, Н.С. Березкина, В.А. Пронько; УО "Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы". – Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2019.
14. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студ. высш. технических учеб. заведений / М.В. Федорюк. - Изд. стер. – Москва: URSS: Либроком, 2017.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа предполагает автономное, дистанционное освоение студентом поставленных целей и задач в пределах учебного материала. Данная форма подготовки должна носить логически последовательный, системный, комплексный характер и предполагает использование всех доступных рекомендуемых форм и методов подготовки.

Самостоятельная работа студента включает в себя работу с учебной литературой по заданным темам дисциплины, поиск новейшей учебной и научной информации в указанных областях знаний и знакомство с ней, а также выполнение поставленных заданий.

Рекомендуемые формы и методы обучения

При организации образовательного процесса используется ***эвристический подход***, который предполагает демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем.

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает освоение содержания через решения практических задач.

При организации образовательного процесса ***используются методы и приемы развития критического мышления,*** которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Перечень рекомендуемых средств диагностики.

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: устный опрос, отчет по домашним практическим упражнениям с их устной защитой, контрольная работа.

Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Отметка за ответы на лекциях и практических занятиях включает в себя полноту ответа, наличие аргументов, примеров из практики, глубину понимания терминов, используемых студентом при ответе на вопросы. При опросах на практических занятиях ценится знание студентом теоретических сведений, полученных на лекции, поэтому студенту перед практическим занятием необходимо почитать и разобраться с лекционным материалом, чтобы он был готов пробовать применять его на практических занятиях.

Примерный перечень вопросов к зачёту

1. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Основные понятия, связанные с ними.
2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, метод решения. Пример ДУ с разделяющимися переменными с решением.
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка, метод решения. Пример однородного ДУ с решением.
4. Уравнения, сводящиеся к однородным.
5. Уравнение Бернулли.
6. Уравнение Риккати.
7. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, метод интегрирующего множителя, пример.
8. Определение дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Критерий принадлежности к ДУ в полных дифференциалах. Метод решения, пример.

9. Интегрирующий множитель. Формула для его нахождения. Случаи $\mu(x,y)=\mu(x)$ и $\mu(x,y)=\mu(y)$. Пример: $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$, найти интегрирующий множитель.

10. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра.

11. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной. Случаи $x=f(y,y')$ и $y=f(x,y')$. Пример: $x=(y')^2$, решить ДУ методом введения параметра.

12. Дифференциальные уравнения Клеро. Пример: $y=xy'+(y')^2$, решить ДУ.

13. Дифференциальные уравнения Лагранжа. Пример: $y=xy'+(y')^2$, решить ДУ.

14. Особое решение. Дискриминантная кривая. Пример: $y=xy'+(y')^2$, найти особое решение.

15. Огибающая семейства кривых. Пример: $y=xc+c^2$, найти огибающую семейства.

16. Теорема Пикара существования и единственности решения задачи Коши ДУ первого порядка, разрешенного относительно производной. Формулировка, схема доказательства.

17. Метод последовательных приближений.

18. Дифференциальные уравнения высших порядков, разрешенные относительно производной. Основные понятия, связанные с ними.

19. Дифференциальное уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$. Пример: $y^{(3)}=1/x$, решить ДУ.

20. Дифференциальные уравнения вида $F(x,y',y'')=0$ и $F(y,y',y'')=0$. Пример: $2yy''+(y')^2=0$, решить ДУ.

21. Системы дифференциальных уравнений первого порядка. Основные понятия, связанные с ними.

22. Первый интеграл системы дифференциальных уравнений первого порядка.

23. Теорема о существовании n функционально независимых первых интегралов системы.

24. Автономные системы и ее функционально независимые первые интегралы. Пример: система $dx/dt=-y, dy/dt=x$, найти все ее функционально независимые первые интегралы.

25. Теорема Пикара существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка и дифференциального уравнения n - го порядка.

26. Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных 1-го порядка. Алгоритм решения задачи Коши.

27. Линейные неоднородные уравнения в частных производных 1-го порядка и их связь с линейными однородными уравнениями в частных производных 1-го порядка.

28. Задача Коши для линейного неоднородного уравнения в частных производных 1-го порядка. Алгоритм решения задачи Коши.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Основные понятия, связанные с ними: решение, задача Коши, общее решение, частное решение, интегральная кривая.
2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, метод решения. Пример ДУ с разделяющимися переменными с решением.
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка, метод решения. Пример однородного ДУ с решением.
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, метод интегрирующего множителя, пример.
5. Определение дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Критерий принадлежности к ДУ в полных дифференциалах. Метод решения, пример.
6. Интегрирующий множитель. Формула для его нахождения. Случаи $\mu(x,y)=\mu(x)$ и $\mu(x,y)=\mu(y)$. Пример: $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$, найти интегрирующий множитель.
7. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра. Случаи $x=f(y,y')$ и $y=f(x,y')$. Пример: $x=(y')^2$, решить ДУ методом введения параметра.
8. Дифференциальные уравнения Клеро и Лагранжа. Пример: $y=xy'+(y')^2$, решить ДУ.
9. Особое решение. Дискриминантная кривая. Пример: $y=xy'+(y')^2$, найти особое решение.
10. Огибающая семейства кривых. Пример: $y=xc+c^2$, найти огибающую семейства.
11. Теорема Пикара существования и единственности решения задачи Коши ДУ первого порядка, разрешенного относительно производной. Формулировка, схема доказательства.
12. Метод последовательных приближений. Пример: $y'=y^2, y(0)=0$. Найти первые два последовательные приближения.
13. Дифференциальные уравнения высших порядков, разрешенные относительно производной. Основные понятия, связанные с ними.
14. Дифференциальное уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$. Пример: $y^{(3)}=1/x$, решить ДУ.
15. Дифференциальные уравнения вида $F(x,y',y'')=0$ и $F(y,y',y'')=0$. Пример: $2yy''+(y')^2=0$, решить ДУ.
16. Линейная зависимость и независимость функций. Вронскиан. Необходимое условие линейной независимости функций. Пример:

$f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=x\,|\,x\,|$, найти их вронскиан и показать, что они линейно независимы.

17. Однородное линейное ДУ n - го порядка. Фундаментальная система решений. Теорема о структуре общего решения.

18. Формула Остроградского- Лиувилля и ее применение для решения однородного линейного ДУ 2 - го порядка. Пример: $y''-2y'+y=0, y_1=e^x$ - его решение. Найти общее решение.

19. Неоднородное линейное ДУ n - го порядка. Теорема о структуре общего решения.

20. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения неоднородного линейного ДУ n - го порядка. Пример: $y''=x$, найти его решение методом Лагранжа.

21. Однородное линейное ДУ n - го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Случай попарно разных действительных корней характеристического уравнения. Пример: $y''-3y'+2y=0$, найти его решение.

22. Однородное линейное ДУ n - го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Случай кратных корней характеристического уравнения. Пример: $y''-2y'+y=0$, найти его решение.

23. Однородное линейное ДУ n - го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Случай комплексных корней характеристического уравнения. Пример: $y''+y=0$, найти его решение.

24. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Основные понятия, связанные с ними: задача Коши, общее решение, частное решение.

25. Однородная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Фундаментальная система решений. Теорема о структуре общего решения.

26. Неоднородная системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Теорема о структуре общего решения.

27. Однородная линейная система ДУ с постоянными коэффициентами. Ее представление в матричном виде.

28. Однородная линейная система ДУ с постоянными коэффициентами. Случай попарно разных действительных корней характеристического уравнения. Пример: $dX/dt=AX, A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, найти ее решение.

29. Однородная линейная система ДУ с постоянными коэффициентами. Случай комплексных корней характеристического уравнения. Пример: $dX/dt=AX, A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, найти ее решение.

30. Однородная линейная система ДУ с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней характеристического уравнения. Матричный способ решения. Пример: $dX / dt = AX$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, найти решение.

31. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения неоднородной линейной системы ДУ. Пример: $dX / dt = AX + F(t), A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$ найти ее решение методом Лагранжа.

32. Матричная экспонента. Метод ее нахождения. Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, найти e^A?

33. Автономные системы ДУ на плоскости. Траектории. Направление движения по траектории. Пример: $dx / dt = -y, dy / dt = x$. Определить направление движения по траектории в точке (-1,-2).

34. Классификация особых точек линейных систем ДУ на плоскости. Пример: $dx / dt = -y, dy / dt = x$. Построить траектории в окрестности особой точки.