МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учебно-методическое объединение по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель Министра образования
Республики Беларусь
________________ А.Г. Баханович
____

Регистрационный № _____

Алгебра и теория чисел

Примерная учебная программа по учебной дисциплине
для специальности
6-05-0533-06 Математика

СОГЛАСОВАНО
Председатель Учебно-методического
объединения по естественнонаучному
образованию
________________ Д.М. Курлович
____

СОГЛАСОВАНО
Начальник Главного управления
профессионального образования
Министерства образования
Республики Беларусь
________________ С.Н. Пищов
____

СОГЛАСОВАНО
Проректор по научно-методической
работе Государственного учреждения
образования ”Республиканский
институт высшей школы“
________________ И.В. Титович
____

Эксперт-нормоконтролер
________________ ______________
____

Минск 2024

СОСТАВИТЕЛИ:

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович – заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Воронович Игорь Иванович – доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Каскевич Виктор Иванович – доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Тихонов Сергей Викторович – доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра алгебры и геометрии Гомельского государственного университета (протокол № 10 от 17.05.2023 г);

Осиновская Анна Александровна – старший научный сотрудник отдела алгебры Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ПРИМЕРНОЙ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № 10 от 18.05.2023);

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по естественнонаучному образованию
(протокол № 7 от 19.05.2023 г.)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 9 от 29.06.2023 г.);

Ответственный за редакцию: **С.В. Тихонов**

Ответственный за выпуск: **С.В. Тихонов**

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Примерная учебная программа по учебной дисциплине «*Алгебра и теория чисел»* разработана в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования I ступени и предназначена для обучающихся по специальности 6-05-0533-06 Математика.

Цели и задачи учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Алгебра и теория чисел» является базовой для преподавания большинства математических дисциплин. Цель дисциплины «Алгебра и теория чисел»: изложить основы современных алгебры и теории чисел.

Образовательная цель: обучить студентов фундаментальным методам общей алгебры, линейной алгебры, теории чисел; ознакомить с основными алгебраическими структурами — группами, кольцами и полями; создать базу для освоения основных понятий и методов современной математики.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления; знакомство с методами математических доказательств; изучение алгоритмов решения конкретных математических задач; привитие студентам умения самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Алгебра и теория чисел»:

1. ознакомить студентов с фундаментальными понятиями и методами линейной алгебры. Изучить матрицы и определители, методы решения систем линейных уравнений, теорию векторных пространств и линейных операторов, теорию квадратичных и билинейных форм;
2. дать введение в задачи и методы теории групп, теории колец и полей, а также теории чисел;
3. изучить комплексные числа и многочлены;
4. развить у студентов аналитическое мышление и общую математическую культуру;
5. привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «*Алгебра и теория чисел*» относится **к модулю «Алгебра и геометрия» 1** государственного компонента.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина «Алгебра и теория чисел» является базовой для преподавания большинства математических дисциплин. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «*Алгебра и теория чисел*» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции:**

БПК-5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия и результаты линейной алгебры, теории билинейных и квадратичных форм, теории групп, колец и полей;
– методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках учебной дисциплины «Алгебра и теория чисел»;
– алгоритмы решения задач по алгебре;

уметь:

– выполнять действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме, извлекать корни из комплексных чисел, применять формулу Муавра;
– вычислять определители;
– выполнять операции над матрицами;
– решать системы линейных уравнений;
– находить базис векторного пространства, суммы и пересечения подпространств, координаты вектора в заданном базисе, находить ранг матрицы и системы векторов;
– находить собственные значения и собственные векторы матрицы и линейного оператора;
– приводить квадратичную форму к каноническому виду;
– приводить ортогональный оператор к каноническому виду;
– находить ортонормированный базис, ортогональное дополнение к подпространству;

– определять, является ли данное подмножество подгруппой в группе, подкольцом или идеалом в кольце, подполем в поле;
– производить вычисления в факторгруппе, факторкольце;

владеть:

– основными навыками решения задач, связанных с линейной алгеброй, многочленами, комплексными числами, квадратичными и билинейными формами, группами, кольцами и полями;
– методами доказательств основных теорем, встречающихся в курсе «Алгебра и теория чисел».
– навыками самообразования и способами использования аппарата алгебры и теории чисел для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1, 2 и 3 семестрах на очной (дневной) форме получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «*Алгебра и теория чисел*» отведено 408 часов, в том числе 212 аудиторных часов, из них: лекции – 106 часов, лабораторные занятия – 90 часов, управляемая самостоятельная работа – 16 часов, из них:

1 семестр – всего 108 часов, в том числе аудиторных – 72 часа, из них лекции — 36 часов, лабораторные занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы;

2 семестр – всего 102 часа, в том числе аудиторных — 68 часов, из них лекции — 34 часа, лабораторные занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы;

3 семестр – всего 198 часов, в том числе аудиторных — 72 часа, из них лекции — 36 часов, лабораторные занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – экзамен в 1-2 семестре, зачет + экзамен в 3 семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Арифметика целых чисел. Сравнения.

Делимость целых чисел и ее свойства. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Простые числа. Основная теорема арифметики. Сравнения и их свойства. Классы вычетов. Функция Эйлера. Решение линейных сравнений от одной неизвестной. Китайская теорема об остатках.

Тема 2. Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры.

Понятие и свойства алгебраической операции. Определения группы, кольца, поля. Примеры. Кольцо классов вычетов.

Тема 3. Поле комплексных чисел.

Алгебраическая форма комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы.

Тема 4. Матрицы и операции над ними.

Понятие матрицы. Операции над матрицами: сложение и умножение матриц, умножение матрицы на скаляр, транспонирование. Свойства операций над матрицами. Многочлен от матрицы.

Тема 5. Перестановки и подстановки.

Перестановки и подстановки. Инверсии и порядки в перестановке, четность перестановки. Транспозиции и циклы. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и произведение транспозиций, четность подстановки. Умножение подстановок и его свойства, симметрическая и знакопеременная группа.

Тема 6. Определители и их применение.

Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства. Определитель транспонированной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Определитель Вандермонда. Определитель произведения квадратных матриц. Обратная матрица. Полная линейная группа. Теорема Крамера.

Тема 7. Многочлены от одной и нескольких переменных.

Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена и ее свойства. Теорема о делении с остатком для многочленов. Наибольший общий делитель многочленов, алгоритм Евклида. Взаимно простые многочлены. Неприводимые многочлены. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители. Теорема Безу и следствия из нее. Схема Горнера. Производная многочлена и ее свойства. Кратность корня многочлена. Основная теорема алгебры. Каноническое разложение многочлена над полями комплексных и вещественных чисел. Многочлены от многих переменных. Симметрические многочлены.

Тема 8. Векторные пространства.

Определение и примеры векторных пространств. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная независимость векторов. Теорема Штейница о замене. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора. Подпространство, его размерность. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей. Прямая сумма подпространств.

Тема 9. Системы линейных уравнений.

Матричная запись линейной системы. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Однородные системы, условие существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Задание подпространства векторного пространства системой линейных уравнений.

Тема 10. Линейные отображения векторных пространств.

Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект. Алгебраические действия над линейными отображениями: сумма, умножение на константу, композиция. Линейный оператор и его матрица. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов. Пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц. Условия обратимости оператора.

Тема 11. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц.

Инвариантное подпространство. Сужение оператора на инвариантное подпространство. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Собственное число и собственный вектор оператора. Характеристический многочлен оператора и матрицы. Теорема Гамильтона–Кэли. Оператор, имеющий диагональную матрицу в некотором базисе; признак диагонализируемости. Жорданова матрица.

Тема 12. Билинейные и квадратичные формы.

Билинейная форма на векторном пространстве, ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса, ранг формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы, их матрицы. Квадратичная форма и ее матрица, существование и единственность полярной билинейной формы. Канонический вид билинейной и квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

Тема 13. Евклидовы пространства.

Определение евклидова пространства. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение к подпространству. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора, расстояние от вектора до подпространства.

Тема 14. Линейные операторы евклидовых пространств.

Сопряженный оператор, его существование и свойства. Инвариантные подпространства для сопряженных операторов. Ортогональные операторы, их свойства. Критерий ортогональности оператора. Разложение пространства в прямую сумму 1- и 2-мерных попарно ортогональных инвариантных относительно ортогонального оператора подпространств. Канонический вид матрицы ортогонального оператора. Самосопряженные операторы, их свойства. Канонический вид матрицы самосопряженного оператора. Существование ортогонального преобразования, приводящего вещественную квадратичную форму к диагональному виду.

Тема 15. Введение в теорию групп.

Определение группы, подгруппы, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм. Порядок элемента группы. Циклические подгруппы. Циклические группы, их классификация. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальная подгруппа. Фактор-группа. Основная теорема о гомоморфизмах групп. Прямое произведение групп.

Тема 16. Введение в теорию колец и полей.

Определение кольца, подкольца, поля, подполя, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм колец, ядро гомоморфизма. Идеалы колец. Факторкольца. Основная теорема о гомоморфизмах для колец. Прямое произведение колец. Характеристика поля. Простые поля. Степень расширения полей, конечные расширения. Мультипликативность степени. Алгебраические и трансцендентные элементы. Простые расширения полей. Алгебраически замкнутые поля, алгебраическое замыкание. Конечные поля. Число элементов в конечном поле. Существование и единственность поля из p^n элементов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1 семестр							
1	**Арифметика целых чисел. Сравнения**	**8**			**8**		**2**	Устный опрос
2	**Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры**	**3**			**2**			Устный опрос Контрольная работа
3	**Поле комплексных чисел**	**6**			**6**			Устный опрос
4	**Матрицы и операции над ними**	**4**			**2**		**2**	Коллоквиум
5	**Перестановки и подстановки**	**3**			**2**			Устный опрос
6	**Определители и их применение**	**6**			**4**		**2**	Устный опрос
7	**Многочлены от одной и нескольких переменных**	**6**			**6**			Устный опрос Контрольная работа
	Всего за семестр	**36**			**30**		**6**	
	2 семестр							
8	**Векторные пространства**	**10**			**10**			Устный опрос
9	**Системы линейных уравнений**	**6**			**4**		**2**	Устный опрос Контрольная работа
10	**Линейные отображения векторных пространств.**	**8**			**8**			Устный опрос. Коллоквиум
11	**Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц**	**10**			**8**		**2**	Устный опрос. Контрольная работа
	Всего за семестр	**34**			**30**		**4**	

	3 семестр							
12	**Билинейные и квадратичные формы**	**8**			**6**		**2**	Устный опрос Контрольная работа
13	**Евклидовы пространства**	**6**			**6**			Устный опрос
14	**Линейные операторы евклидовых пространств**	**6**			**4**		**2**	Устный опрос Коллоквиум
15	**Введение в теорию групп**	**8**			**8**			Устный опрос
16	**Введение в теорию колец и полей**	**8**			**6**		**2**	Устный опрос. Контрольная работа
	Всего за семестр	**36**			**30**		**6**	
	Всего по дисциплине	**106**			**90**		**16**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Глухов, М. М. Алгебра: учебник для вузов / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 608 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/187793.
2. Беняш-Кривец В.В. Лекции и семинары по алгебре: группы, кольца, поля. / В.В. Беняш-Кривец, Г.Е. Пунинский. – Минск: БГУ, – 2015. – 152 с. http://elib.bsu.by/handle/123456789/149209.
3. Беняш-Кривец В.В. Лекции и семинары по алгебре: основные понятия алгебры и теории чисел. // В.В. Беняш-Кривец, Г.Е. Пунинский. Минск: БГУ, 2015. 152 с. 116 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/149208
4. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие для вузов / И. В. Проскуряков. – 16-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 476 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/183752
5. Каргаполов, М. И. Основы теории групп: учебное пособие для вузов / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 288 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/238481
6. Мартынов, Л. М. Алгебра и теория чисел для криптографии: учебное пособие для вузов / Л. М. Мартынов. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 456 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/189446
7. Виноградов И. М. Основы теории чисел : учебное пособие [для вузов] / И. М. Виноградов. - Изд. 15-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2023. - 176 с. https://e.lanbook.com/book/298499

Перечень дополнительной литературы

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры / Э. Б. Винберг. – Москва: Изд–во МЦНМО, 2019. – 592 с.

2. Милованов М.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 1. / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. Минск: Амалфея, 2001. https://elib.bsu.by/handle/123456789/13295
3. Милованов М.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 2. / М.В. Милованов, М.М. Толкачев, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. Минск: Амалфея, 2001. https://elib.bsu.by/handle/123456789/13296
4. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: Учеб. пособие для студ. мат. и физических спец. ун–тов / А. А. Бурдун, Е. А. Мурашко, М. М. Толкачев, А. С. Феденко ; Под ред. А. С. Феденко. – 2–е изд. – Минск: Унiверсiтэцкае, 1999. – 302 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/13294
5. Монахов В.С. Алгебра и теория чисел: практикум. // В.С. Монахов, А.В. Бузланов. - Минск: Изд. центр БГУ, 2007. https://elib.bsu.by/handle/123456789/13297
6. Фаддеев, Д. К. Задачи по высшей алгебре: учебник / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – 17-е изд.,стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 288 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/210164
7. Сборник задач по алгебре : Для студ. 1- 2 курсов матем. фак. ун-тов и пед. ин- тов / В. А. Артамонов, Ю. А. Бахтурин, Э. Б. Винберг и др.; Под ред. А. И. Кострикина. - Москва : Факториал : Просперус, 1995. - 454 с.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник для студ. ун–тов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика": [в 3 ч.]. Ч. 1: Основы алгебры / А. И. Кострикин. – Москва: Изд–во МЦНМО, 2022. – 271 с.
9. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник для студ. ун–тов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика": [в 3 ч.]. Ч. 2: Линейная алгебра / А. И. Кострикин. – Новое издание. – Москва: Изд–во МЦНМО, 2022. – 367 с.
10. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник для студ. ун–тов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика": [в 3 ч.]. Ч. 3: Основные структуры алгебры / А. И. Кострикин. – Москва: Изд–во МЦНМО, 2022. – 271 с.
11. Дыбкова, Е.В. Задачи по алгебре. Основы теории групп / Е.В. Дыбкова, И.Б. Жуков, А.А. Семенов, Р.А. Шмидт. – С.–Петербург: Изд-во С.-Петербургского университета, 1996. – 32 с.
12. Размыслович Г. П. Геометрия и алгебра. В 5 - ти частях. Ч. 1: Матрицы, определители, системы линейных уравнений: пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики Г.П. Размыслович - Минск: БГУ, 2010. - 73 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/2336

13. Геометрия и алгебра : пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики : в 5 ч. Ч. 2 : Векторные пространства / Г. П. **Размыслович** ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. высшей математики. - Минск : БГУ, 2013. - 56 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/50318
14. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра : учебные материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики. В 5 ч. Ч. 3. Линейные и билинейные отображения векторных пространств / Г. П. Размыслович. — Минск :БГУ, 2014. - 71 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/98210
15. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра : учебные материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики. В 5 ч. Ч. 4. Полиномиальные и нормальные формы матриц. Евклидово и унитарное пространства / Г. П. Размыслович. — Минск :БГУ, 2014. - 65 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/105019

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Контроль работы студента проходит в форме устного опроса, коллоквиума, выполнения контрольных, самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории. Задания к самостоятельным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Алгебра и теория чисел» учебным планом предусмотрен зачет и экзамен.

Зачет по дисциплине выставляется в случае сдачи всех контрольных работ и коллоквиума.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Формирование отметки за текущую аттестацию: отметка текущей аттестации представляет собой среднеарифметическую величину отметок по всем формам (мероприятиям) текущего контроля знаний по учебной дисциплине.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей аттестации составляет 40%, экзаменационной отметки – 60%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 1. Арифметика целых чисел. Сравнения. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Методом математической индукции докажите, что для любого натурального n число a делится на число b: а) $a = 6^{2n} - 1$, $b = 35$; б) $a = 4^n + 15n - 1$, $b = 9$; в) $a = n^3 + 5n + 12$, $b = 6$.
2. Найдите неполное частное и остаток от деления числа a на число b: а) $a = 761, b = 13$; б) $a = 437, b = 24$.
3. С помощью алгоритма Евклида вычислите $НОД(a,b)$ и выразите его через исходные числа. Используя связь НОД и НОК двух натуральных чисел, вычислите $НОК(a,b)$: а) $a = 5544, b = 7644$; б) $a = 1188, b = 3080$; в) $a = 1296, b = 6600$.
4. С помощью канонических разложений чисел a,b,c найдите $НОД(a,b,c)$ и $НОК(b,c)$: а) $a = 6188, b = 88, c = -320$; б) $a = 1188, b = -132, c = -64$; в) $a = 9100, b = 92, c = -114$.
5. Решить в целых числах уравнение $1275x - 3796y = 1$.
6. Используя свойства сравнений, найти остаток от деления: а) $a = 178^{214}$ на $b = 22$; б) $a = 5^{50} + 13^{100}$ на $b = 18$.
7. Решите сравнение 1-й степени: а) $-3x \equiv 13 \pmod{4}$; б) $7x \equiv -12 \pmod{16}$.
8. Решить систему сравнений $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{12} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$.
9. Составьте таблицы сложения и умножения в кольце классов вычетов: а) $\mathbf{Z}_5$; б) $\mathbf{Z}_6$.
10. Вычислите значение функции Эйлера для числа a: а) $a = 142560$; б) $a = 421200$.

Форма контроля – устный опрос.

Тема 4. Матрицы и операции над ними. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Две квадратные матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Докажите, что если матрицы B, C перестановочны с A, то $B + C$ и BC также перестановочны с A.

2. Доказать, что если матрицы A и B перестановочны, то $(A+B)^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i A^i B^{n-i}$.

3. Вычислить BC и CB^T, где $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}$.

4. Вычислить $AA^{\bullet}$ и $f(B)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1-2i & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x) = -x^2 + 3x - 6$.

5. Для матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и полинома $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ вычислить $f(C)$.

6. С помощью элементарных преобразований найти матрицу C^{-1}, где $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Используя явные формулы для обратной матрицы, вычислить C^{-1}, где $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Найти A^{-1}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Найти все матрицы X, перестановочные с данной матрицей $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Получающуюся при решении систему линейных уравнений решить методом Гаусса.

10. Пусть A – квадратная матрица порядка n, такая, что $A^2 = A$. Докажите, что $(2A - E_n)^2 = E_n$.

11. Найдите все квадратные матрицы порядка 2, такие, что A^2 – нулевая матрица.

12. Матрица S называется симметрической, если $S^T = S$. Докажите, что если A – произвольная квадратная матрица, то матрицы $A + A^T$, AA^T являются симметрическими.

13. Пусть A – обратимая квадратная матрица. Докажите, что $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 6. Определители и их применение. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. С каким знаком произведение $a_{25}a_{41}a_{36}a_{52}a_{13}a_{65}$ входит в определитель шестого порядка?
2. Выписать все миноры второго порядка, содержащиеся в 1-й и 3-й строках матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, а также алгебраические дополнения к ним. Пользуясь теоремой Лапласа, записать разложение $\det A$: а) по 1-й и 3-й строке; б) по 2-й строке.
3. Как изменится определитель порядка n, если его повернуть на 90° вокруг «центра» против часовой стрелки?
4. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & a \\ z_2 & \overline{z}_2 & b \\ z_3 & \overline{z}_3 & c \end{vmatrix}$, где z_1, z_2, z_3 – комплексные, а a, b, c – вещественные числа, является чисто мнимым числом.
5. С каким знаком входит в развернутое выражение определителя порядка n произведение элементов побочной диагонали?
6. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{ik} умножить на число c^{i-k}, где $c \neq 0$ – фиксированное число?
7. Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?
8. Найти наибольшее значение определителя третьего порядка, составленного из чисел 0 и 1.
9. Как изменится определитель квадратной матрицы, если каждый элемент матрицы заменить на противоположный?
10. Как изменится определитель квадратной матрицы, если его строки записать в обратном порядке?
11. Как изменится определитель квадратной матрицы, если первую строку поставить на место последней строки, а остальные строки сдвинуть вверх, не меняя их порядок?
12. Пусть A – квадратная матрица над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Заменяя элементы матрицы A сопряженными комплексными числами, получим матрицу B. Как связаны между собой определители матриц A и B?

13. Пусть все элементы матриц A и A^{-1} – целые числа. Чему равны определители этих матриц?
14. Найдите такие значения i, j, k, чтобы произведение $a_{2i}a_{41}a_{j3}a_{5k}a_{12}a_{64}$ входило в определитель матрицы шестого порядка со знаком минус.
15. Вычислите определители матриц $B = \begin{pmatrix} 3i & 1+i \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
16. Вычислите определитель матрицы $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.
17. Разложить определитель матрицы $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ по второй строке и третьему столбцу.

Форма контроля – устный опрос.

Тема 9. Системы линейных уравнений. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Решите следующие системы, используя правило Крамера:

а) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = -8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$.

2. Исследуйте системы на совместность. Совместные системы решите методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3ix_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - ix_2 + 2x_3 = i - 2 \\ -x_1 + 3x_2 - ix_3 = 3 \end{cases}$; в) $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 5$.

3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы уравнений $AX = 0$, где а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 9 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 7 & 13 & 10 & 11 & 9 \\ -1 & -3 & -14 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -22 & -6 & -4 \\ 7 & 11 & -12 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A:=\begin{bmatrix} 10 & 18 & 8 & 14 & 10 \\ -5 & -9 & -4 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & -19 & -4 & -2 \\ 15 & 25 & -10 & 15 & 9 \end{bmatrix}$;

г) $A:=\begin{bmatrix} 13 & 23 & 6 & 17 & 13 \\ -6 & -11 & -7 & -9 & -5 \\ -7 & -14 & -21 & -14 & -8 \\ 11 & 19 & 0 & 13 & 7 \end{bmatrix}$; д) $A=(1,2,-1,0,3)$.

4. Линейную оболочку следующей системы векторов задайте системой линейных уравнений: а) $v_1=(1,1,1,1)$; б) $v_1=(1,1,1,1), v_2=(1,2,3,4)$; в) $v_1=(1,1,1,1), v_2=(1,2,3,4), v_3=(1,0,1,0)$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 11. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. В некотором базисе даны матрица A отображения f и векторы e_1, e_2, e_3. Определить, какие из указанных векторов являются собственными векторами отображения f: а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $e_1=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\end{pmatrix}$.
2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей A: а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Подобна ли матрица A диагональной матрице: а) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$?
4. Докажите, что вектор лежит в ядре линейного оператора тогда и только тогда, когда он является собственным и соответствует собственному значению нуль.
5. Докажите, что при умножении линейного оператора на ненулевой скаляр множество собственных векторов не меняется, а собственные значения умножаются на этот скаляр.
6. Найти жорданову нормальную форму матрицы: а) A^2, где $A=diag(J_3(0),J_3(0))$; б) $A=\begin{pmatrix}0 & J_3(0)\\ J_3(0) & 0\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}0 & J_3(0)\\ J_3(0) & 0\end{pmatrix}$; г) $A=-J_4(0)^2$; д) $A=-J_4(1)^2$; е) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.
7. Выясните, являются ли подобными матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}10 & 4\\ -25 & -10\end{pmatrix}$.
8. Докажите, что матрица A, обладающая свойством $A^k=E$ при некотором натуральном k, подобна диагональной матрице и найдите вид этой диагональной матрицы.
9. Приведите пример двух неподобных матриц, характеристические и минимальные многочлены которых одни и те же.

Форма контроля **-** контрольная работа.

Тема 12. Билинейные и квадратичные формы. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Пусть A – матрица невырожденной билинейной формы Φ на вещественном пространстве V размерности n, где n – нечетно. Существует ли другой базис V, в котором матрицей Φ является $-A$? Что будет в случае четного n?
2. Доказать, что если $f(x), g(y)$ – линейные формы на векторном пространстве V, то отображение $\Phi: V \times V \to V$, $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$, является билинейной формой на V и $\operatorname{rank}\Phi = 1$. Является ли Φ симметрической, кососимметрической?
3. Пусть Φ – билинейная форма на векторном пространстве V и пусть W – множество всех векторов $x \in V$ таких, что $\Phi(x, y) = 0$ для всех векторов $y \in V$. Доказать, что W – подпространство в V и справедлива формула $\operatorname{rank}\Phi = \dim V - \dim W$.
4. Пусть Φ – билинейная форма на векторном пространстве V, V_1 – подпространство в V и Φ_1 – ограничение Φ на V_1. Предположим, что Φ_1 – невырожденная билинейная форма. Доказать, что $\operatorname{rank}\Phi \geq \dim V_1$.
5. Пусть Φ – билинейная форма на векторном пространстве V и $\operatorname{rank}\Phi = 1$. Доказать, что существуют линейные формы $f(x), g(y)$ на векторном пространстве V такие, что $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$.
6. Пусть Φ – симметрическая билинейная форма на векторном пространстве V, а Φ_1 – кососимметрическая билинейная форма на V. Предположим, что $\Phi + \Phi_1 = 0$. Доказать, что $\Phi = \Phi_1 = 0$.
7. Найти полярную билинейную форму F для квадратичной формы $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$. Записать матрицу F. Вычислить $F(x, y)$, где $x = (1, i, 1)$, $y = (2, -1, -i)$.
8. Найти симметрическую билинейную форму Φ, ассоциированную с квадратичной формой $q(x) = F(x, x)$, где $F(x, y) = -x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_3$. Записать матрицу Φ. Вычислить $\Phi(x, y)$, где $x = (2, 1-i, 0)$, $y = (0, -1, i)$.
9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ некоторой билинейной формы $F(x, y)$. Записать эту билинейную форму $F(x, y)$, а также соответствующую ей квадратичную форму $f(x) = F(x, x)$ и ее матрицу.
10. Привести квадратичную форму $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$ к каноническому виду над полями вещественных и комплексных чисел. Над

полем R найти ее положительный и отрицательный индекс инерции, сигнатуру и ранг.

11. Пусть p – положительный индекс инерции вещественной квадратичной формы $f(x)$ и q – ее отрицательный индекс инерции. Пусть заданы p положительных чисел $a_1,\ldots,a_p$ и q отрицательных чисел $b_1,\ldots,b_q$. Доказать, что существует базис, в котором форма $f(x)$ принимает вид $f(x)=a_1x_1^2+\cdots+a_px_p^2+b_1x_{p+1}^2+\cdots+b_qx_{p+q}^2$.
12. Привести квадратичную форму $f(x)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ к каноническому виду с помощью метода Лагранжа. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.
13. Выясните, какие из квадратичных форм $f_1=x_1^2-x_2x_3$, $f_2=y_1y_2-y_3^2$, $f_3=z_1z_2+z_3^2$ эквивалентны между собой а) над □ ; б) над □ .
14. При каких значениях λ данная квадратичная форма положительно определена, отрицательно определена: $f(x)=\lambda x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$?
15. Найдите все значения λ, при которых квадратичная форма $-2x_1^2-8x_2^2-3x_3^2+2\lambda x_1x_2+4x_1x_3-2\lambda x_2x_3$ отрицательно определена.
16. При каких значениях λ квадратичная форма $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$ положительно определена, отрицательно определена?
17. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $f(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-4xy+2xz-2yz$.

Форма контроля - контрольная работа.

Тема 14. Линейные операторы евклидовых пространств. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Пусть преобразование f нильпотентно, т.е. $f^n=0$ для некторого $n>0$. Доказать, что сопряженное преобразование f^* нильпотентно с тем же показателем нильпотентности n.
2. Доказать, что для двух преобразований f и g произведение $f^*g=0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} f$ ортогонально $\operatorname{Im} g$.
3. Пусть f – поворот плоскости на угол α. Найти сопряженное преобразование f^*.

4. Пусть $\mathbf{a}$ – фиксированный вектор трехмерного геометрического пространства. Преобразование f сопоставляет каждому вектору $\mathbf{x}$ векторное произведение $[\mathbf{a},\mathbf{x}]$. Найти f^*.
5. Доказать, что преобразование f диагонализуемо тогда и только тогда, когда преобразование f^* диагонализуемо.
6. Доказать, что $\operatorname{Im} f$ совпадает с ортогональным дополнением $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.
7. Пусть f, g – самосопряженные операторы евклидова пространства. Доказать, что самосопряженными будут также операторы:
   1) $fg + gf$; 2) $af + bg$ для любых $a,b \in \mathbb{R}$; 3) f^{-1} для невырожденного f.
8. Доказать, что произведение fg самосопряженных операторов f и g является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда f и g перестановочны.
9. Может ли матрица ненулевого самосопряженного оператора евклидова пространства в каком-либо ортонормированном базисе быть: а) кососимметричной; б) не симметричной?
10. Найти ортогональную матрицу C, приводящую данную симметрическую матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ к диагональному виду, и найти этот диагональный вид.
11. Доказать, что все собственные значения самосопряженного преобразования равны нулю тогда и только тогда, когда это – нулевое преобразование.
12. Найти все самосопряженные нильпотентные преобразования (оператор f нильпотентен, если $f^n = 0$ для некоторого $n > 0$).
13. Доказать, что для любых двух векторов одинаковой длины найдется ортогональное преобразование, переводящее первый вектор во второй.
14. Доказать, что для любых двух ортонормированных базисов евклидова пространства найдется ортогональный оператор, переводящий первый базис во второй.
15. Доказать, что преобразование $f^* f$ ортогонально тогда и только тогда, когда ортогонально f.
16. Пусть V – евклидово пространство строк со стандартным скалярным произведением, оператор f переводит векторы $a_1 = (4,7)$, $a_2 = (2,1)$ в векторы $b_1 = (8,1)$, $b_2 = (2,-1)$. Является ли f ортогональным оператором?

17. Пусть e_1, e_2 – ортонормированный базис евклидова пространства V. Линейный оператор f переводит векторы e_1, e_2 в векторы $e_1 - e_2$ и $e_1 + e_2$. Является ли f ортогональным оператором?
18. Является ли сумма ортогональных операторов ортогональным оператором?
19. Является ли произведение ортогонального оператора на число ортогональным оператором?
20. Пусть f – самосопряженный ортогональный оператор евклидова пространства. Каковы собственные значения f? Найти канонический вид матрицы f.

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 16. Введение в теорию колец и полей. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Составить таблицу умножения в кольце $\mathbb{Z}_5$.
2. Найдите все идеалы кольца $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, факторкольца по которым являются полями.
3. Составить таблицы сложения и умножения в $\mathbb{Z}_6$.
4. Найти все подкольца кольца $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
5. Найти все идеалы кольца $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.
6. Найдите все подкольца кольца $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$.
7. Найдите все гомоморфизмы кольца $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ в себя.
8. Доказать, что если матрица $x \in M_n(K)$, где $K-$поле, перестановочна со всеми остальными матрицами, то $x-$скалярная матрица.
9. Пусть $F-$произвольное поле. Описать все идеалы кольца матриц $M_n(F)$.
10. Пусть $K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} z, w \in \mathbb{C} \right\}$, $K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix} | \, x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$.

    Проверить, что $K_1, K_2 -$кольца и $K_1 \cong K_2$.
11. Найти многочлен третьей степени, корнями которого являются кубы комплексных корней многочлена $x^3 - x - 1$.
12. Пусть $K-$множество всех $u \times u-$матриц над $\mathbb{R}$, перестановочных с заданной матрицей A. Доказать, что $K-$кольцо.

Форма контроля - контрольная работа.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа № 1.

1. Найти $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\dfrac{z_1-\overline{z_2}}{z_1+\overline{z_2}}$, где $z_1 = n+i$, $z_2 = 1+ni$, n — номер варианта.

2. Изобразить на плоскости комплексные числа z_1, z_2, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $z_1-\overline{z_2}$, $z_1+\overline{z_2}$, где z_1, z_2 – числа из задачи 1.

3. Вычислить: $\sqrt[3]{2-i\sqrt{12}}$.

4. Вычислить α^{-1}, $\alpha\beta$, α^{100n}, где: $\alpha,\beta \in S_8$ – некоторые подстановки.

5. Вычислить AA^{*} и $f(B)$, где $f(x)=x^2-2x+1$, а A,B – заданные матрицы второго порядка.

Контрольная работа № 2.

1. Вычислить произведение подстановок и разложить его в произведение независимых циклов и произведение транспозиций: $(1,2,5,6,9)(2,3,4,5,9)(5,6,7,8,9)$.

2. Вычислить AB и BA, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Выбрать i, j, k так, чтобы произведение $a_{2i}a_{44}a_{j5}a_{5k}a_{12}a_{64}$ входило в развернутое выражение определителя шестого порядка со знаком минус.

4. Вычислите определитель данной матрицы.

5. Найти матрицу, обратную к заданной матрице.

Контрольная работа № 3.

1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы уравнений $AX=0$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Найти базис суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов $a_1 := [10,17,-3,11], a_2 := [5,12,-8,6],\ b_1 := [-1,-2,-3,-2], b_2 := [1,0,-1,0]$.

3. Выяснить, является ли подпространством соответствующего векторного пространства следующая совокупность векторов: последовательности вещественных чисел, имеющие предел: 1) 0; 2) $a \neq 0$.

4. Является ли следующая система функций линейно независимой: $\sin x, \sin(x+1),\ \sin x+2$?

5. При каких значениях x ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ равен: а) 1; б) 2.

Контрольная работа № 4.

1. Как изменится матрица линейного оператора, если в базисе $e_1,\ldots,e_n$ вектор e_1 заменить на e_1+e_2?

2. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ диагонализируемой.

3. Доказать, что преобразование $f: M_2(\mathrm{C})\to M_2(\mathrm{C})$, $f(X)=AX$, где A --- фиксированная матрица, является линейным. Найти матрицу f, а также собственные векторы, собственные значения и (по возможности) инвариантные подпространства f в случае, когда $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$.

4. Найти жорданову нормальную форму матрицы A^2, где $A=diag(J_3(0),J_3(0))$.

Контрольная работа № 5.

1. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.
$f(x)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.$

2. При каких значениях λ данная квадратичная форма положительно определена, отрицательно определена.
$f(x)=\lambda x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3.$

3. С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки системы векторов
$a_1=(1,2,-1,1),\quad a_2=(1,1,2,2),\quad a_3=(-1,2,0,2).$

4. Найти ортогональную проекцию вектора v на подпространство W, ортогональную составляющую вектора v и расстояние от вектора v до подпространства W: $W=\langle(1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)\rangle,\quad v=(4,-1,-3,4).$

5. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в пространстве $\mathbb{R}^5$: $A=(2,4,2,4,2),\quad B=(6,4,4,4,6),\quad C=(5,7,5,7,2).$

Контрольная работа № 6.

1. Обозначим через G множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 3b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in Q$, a и b одновременно не равны нулю. Доказать, что G является подгруппой в $GL_2(Q)$.
2. Найти разложение Лагранжа в левые смежные классы циклической группы $G = \langle a \rangle$ порядка 18 по циклической подгруппе $H = \langle a^{12} \rangle$.
3. В группе $\mathbb{C}^*$ найти порядок элемента $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$.
4. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — различные вещественные числа. Доказать, что отображение $\Psi : R[x] \to R^n$, $\Psi(f(x)) = (f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n))$ является гомоморфизмом. Найти ядро Ψ.
5. Доказать, что в факторгруппе C^* / T, где $T = \{ z \in C \mid |z| = 1 \}$, все неединичные элементы имеют бесконечный порядок.

Примерная тематика практических/ лабораторных занятий

1 семестр

1. Делимость целых чисел и ее свойства. Наибольший общий делитель.
2. Алгоритм Евклида. Простые числа. Основная теорема арифметики.
3. Сравнения и их свойства. Классы вычетов.
4. Функция Эйлера.Решение линейных сравнений от одной неизвестной. Китайская теорема об остатках.
5. Понятие и свойства алгебраической операции. Определения группы, кольца, поля. Кольцо классов вычетов.
6. Алгебраическая форма комплексных чисел.
7. Тригонометрическая форма комплексных чисел.
8. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы.
9. Операции над матрицами и их свойства. Многочлен от матрицы. Специальные виды матриц.
10. Перестановки и подстановки. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и произведение транспозиций, четность подстановки. Умножение подстановок и его свойства.
11. Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
12. Определитель Вандермонда. Обратная матрица. Теорема Крамера.
13. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Теорема о делении с остатком для многочленов. Наибольший общий делитель многочленов, алгоритм Евклида.

14. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители. Теорема Безу и следствия из нее. Схема Горнера. Производная многочлена и ее свойства. Кратность корня многочлена.
15. Основная теорема алгебры**.** Каноническое разложение многочлена над полями комплексных и вещественных чисел. Многочлены от многих переменных. Симметрические многочлены.

2 семестр

1. Определение и примеры векторных пространств. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная независимость векторов.
2. Теорема Штейница о замене. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса.
3. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора. Подпространство, его размерность.
4. Ранг системы векторов. Ранг матрицы.
5. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей. Прямая сумма подпространств.
6. Матричная запись линейной системы. Метод Гаусса. Однородные системы, условие существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений.
7. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Задание подпространства векторного пространства системой линейных уравнений.
8. Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект.
9. Алгебраические действия над линейными отображениями: сумма, умножение на константу, композиция. Линейный оператор и его матрица.
10. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов.
11. Пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц. Условия обратимости оператора.
12. Инвариантное подпространство. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств.
13. Собственное значение и собственный вектор оператора. Характеристический многочлен оператора и матрицы.
14. Теорема Гамильтона–Кэли. Оператор, имеющий диагональную матрицу в некотором базисе; признак диагонализируемости.
15. Жорданова матрица. Жорданова нормальная форма матрицы.

3 семестр

1. Билинейная форма на векторном пространстве, ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса, ранг формы.

Симметрические и кососимметрические билинейные формы, их матрицы.

2. Квадратичная форма и ее матрица, существование и единственность полярной билинейной формы. Канонический вид билинейной и квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
3. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.
4. Определение евклидова пространства. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши–Буняковского.
5. Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение к подпространству.
6. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора, расстояние от вектора до подпространства.
7. Сопряженный оператор, его существование и свойства. Ортогональные операторы, их свойства. Критерий ортогональности оператора.
8. Канонический вид матрицы ортогонального оператора. Самосопряженные операторы, их свойства. Канонический вид матрицы самосопряженного оператора.
9. Определение группы, подгруппы, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм.
10. Порядок элемента группы. Циклические подгруппы. Циклические группы, их классификация. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы.
11. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальная подгруппа. Факторгруппа.
12. Основная теорема о гомоморфизмах групп. Прямое произведение групп.
13. Определение кольца, подкольца, поля, подполя, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм колец, ядро гомоморфизма.
14. Идеалы колец. Факторкольца. Основная теорема о гомоморфизмах для колец. Прямое произведение колец.
15. Степень расширения полей. Алгебраические и трансцендентные элементы. Простые расширения полей.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

– освоение содержание образования через решения практических задач;

– приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

– ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

– использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;

– работы, предусматривающие аналитическое решение задач и выполнение заданий лабораторных и практических занятий;

– выполнение домашних заданий;

– подготовка к лабораторным и практическим занятиям;

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Алгебра и теория чисел» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов общего высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, экзамену, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к экзамену

1 семестр

1. Свойства делимости целых чисел. Теорема о делении с остатком. НОД целых чисел. Алгоритм Евклида.
2. Теорема о представлении НОД целых чисел в виде целочисленной линейной комбинации. Нахождение НОД нескольких целых чисел.
3. Взаимно простые числа. Критерий взаимной простоты. НОК целых чисел.
4. Простые числа, их свойства. Основная теорема арифметики.
5. Сравнения и их свойства.
6. Классы вычетов по модулю n, их свойства. Полная система вычетов.
7. Функция Эйлера, ее мультипликативность и вычисление.
8. Теоремы Эйлера и Ферма.
9. Решение линейных сравнений.
10. Алгебраическая операция, ее свойства. Примеры. Ассоциативность.
11. Теоремы о нейтральном и обратном элементе.
12. Группа, кольцо, поле. Определения и примеры.
13. Кольцо классов вычетов Z_m.
14. Обратимые элементы в Z_m. Критерий того, что Z_m — поле.
15. Определение комплексных чисел, операции сложения и умножения и их свойства. Алгебраическая форма комплексных чисел.
16. Операция сопряжения комплексных чисел и ее свойства.
17. Комплексная плоскость, тригонометрическая форма комплексных чисел. Модуль комплексного числа, его свойства.
18. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
19. Геометрическая интерпретация действий над комплексными числами.
20. Извлечение корней из комплексных чисел.
21. Корни из единицы. Первообразные корни из единицы и их свойства.
22. Определения перестановок и подстановок, их число. Транспозиции и циклы. Четность перестановки.
23. Теорема о характере четности перестановки после применения к ней транспозиции.
24. Умножение подстановок. Симметрическая группа.
25. Разложение подстановки в произведение транспозиций.
26. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
27. Матрицы и действия над ними. Умножение матрицы на число и его свойства.
28. Свойства сложения матриц. Операция транспонирования и ее свойства.

29. Свойства умножения матриц.
30. Определители. Теорема о замене строк в определителе.
31. Свойства определителей порядка n.
32. Теорема об определителе произведения матриц.
33. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
34. Теорема о разложении определителя по строке.
35. Определитель Вандермонда.
36. Обратная матрица. Критерий существования и методы вычисления.
37. Свойства обратной матрицы.
38. Системы линейных уравнений. Метод Крамера.
39. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.
40. Кольцо многочленов от одной переменной. Степень многочлена и ее свойства.
41. Теорема о делении многочленов с остатком.
42. Делимость многочленов и ее свойства. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
43. Теорема о представлении НОД многочленов в виде линейной комбинации. Взаимно простые многочлены. Критерий взаимной простоты.
44. Неприводимые многочлены и их свойства.
45. Разложение многочлена на неприводимые множители.
46. Кратные множители многочлена.
47. Корни многочленов. Теорема Безу и ее следствия. Кратные корни.
48. Схема Горнера.
49. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
50. Неприводимые многочлены над C и R. Каноническое разложение многочленов из C[x] и R[x].

2 семестр

1. Векторные пространства. Определение и примеры. Простейшие свойства векторных пространств.
2. Линейная зависимость и линейная независимость. Примеры. Свойства линейной зависимости. Критерии линейной зависимости.
3. Базис векторного пространства. Примеры.
4. Эквивалентные системы векторов. Лемма Штейница.
5. Размерность векторного пространства. Свойства n-мерных векторных пространств.
6. Координаты вектора. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода.

7. Элементарные преобразования систем векторов.
8. Изоморфизмы векторных пространств и их свойства. Критерий изоморфности векторных пространств.
9. Подпространства векторного пространства. Примеры
10. Операции над подпространствами.
11. Размерности суммы и пересечения подпространств.
12. Прямая сумма подпространств. Критерии.
13. Прямое дополнение.
14. Базис и ранг системы векторов. Ранг матрицы.
15. Теорема о ранге матриц.
16. Ранг произведения двух матриц.
17. Методы вычисления ранга матрицы.
18. Критерий совместности системы линейных уравнений.
19. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
20. Задание подпространства системой уравнений. Связь решений однородной и неоднородной систем.
21. Линейные отображения. Примеры.
22. Простейшие свойства линейных отображений.
23. Теорема о продолжении отображения базиса.
24. Действия над линейными отображениями.
25. Матрица линейного оператора.
26. Матрица суммы и произведения операторов.
27. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
28. Ядро и образ и линейного отображения.
29. Нахождение ядра линейного оператора. Теорема о ранге и дефекте.
30. Инвариантные подпространства. Определение и примеры.
31. Сумма и пересечение инвариантных подпространств. Инвариантные подпространства и матрица линейного оператора.
32. Собственные векторы и собственные значения. Определения и примеры.
33. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Подпространство V_λ.
34. Нахождение собственных значений.
35. Теорема Гамильтона – Кэли.
36. Минимальный полином матрицы и оператора.
37. Определение жордановой нормальной формы и канонического базиса. Нахождение ЖНФ матрицы.

3 семестр

1. Билинейные формы. Примеры. Матрица билинейной формы. Симметрические билинейные формы и их матрицы.
2. Теорема об изменении матрицы билинейной формы при переходе к другому базису. Ранг билинейной формы и его независимость от выбора базиса.
3. Квадратичные формы. Полярная билинейная форма для данной квадратичной формы. Теорема о существовании и единственности полярной билинейной формы
4. Матрица квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису. Ранг квадратичной формы и его независимость от выбора базиса.
5. Канонический базис относительно билинейной (квадратичной) формы и канонический вид билинейной (квадратичной) формы. Матрица билинейной (квадратичной) формы в каноническом базисе. Алгоритм Лагранжа.
6. Нормальный вид комплексной квадратичный формы.
7. Нормальный вид действительной квадратичной формы. Закон инерции действительных квадратичных форм. Положительный и отрицательный индексы инерции.
8. Знакоопределенные квадратичные формы. Канонический вид положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра.
9. Евклидовы пространства. Длина вектора.
10. Неравенство Коши-Буняковского.
11. Неравенство треугольника. Угол между векторами в евклидовом пространстве.
12. Ортогональные векторы в евклидовом (унитарном) пространстве и их свойства. Теорема о линейной независимости системы попарно ортогональных ненулевых векторов.
13. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение к подпространству. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
14. Теорема о разложении евклидова векторного пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
15. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства, их нахождение.
16. Связь между ортонормированными базисами евклидова векторного пространства.
17. Оператор, сопряженный к данному оператору евклидова пространства. Теорема о существовании и единственности сопряженного оператора. Матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе.

18. Свойства сопряженного оператора пространства. Теорема об инвариантных подпространствах.
19. Ортогональные операторы. Невырожденность ортогонального оператора. Образ ортонормированного базиса относительно ортогонального оператора.
20. Критерий ортогональности оператора. Матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе.
21. Инвариантные подпространства ортогонального оператора.
22. Собственные значения ортогонального оператора. Ортогональные операторы 1 и 2-мерных векторных пространств.
23. Теорема о каноническом виде матрицы ортогонального оператора. Следствие для ортогональных матриц.
24. Самосопряженные операторы евклидовых векторных пространств. Матрица самосопряженного оператора. Свойство ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно самосопряженного оператора.
25. Теорема об одномерном подпространстве, инвариантном относительно самосопряженного оператора евклидова векторного пространства, Следствия.
26. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора. Следствие для симметрических матриц.
27. Приведение действительной квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования координат.
28. Определение группы, подгруппы. Примеры.
29. Порядок элементов группы, его свойства. Циклические подгруппы, их порядок.
30. Циклические группы. Их классификация.
31. Подгруппы циклической группы.
32. Смежные классы. Их свойства. Критерий равенства смежных классов. Индекс подгруппы.
33. Теорема Лагранжа и следствия из нее.
34. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп, их свойства.
35. Нормальные подгруппы. Примеры. Нормальность ядра гомоморфизма.
36. Факторгруппа. Канонический гомоморфизм.
37. Основная теорема о гомоморфизмах групп.
38. Прямое произведение групп.
39. Определения кольца, подкольца, поля, подполя. Примеры.
40. Гомоморфизм и изоморфизм колец. Их свойства. Ядро гомоморфизма.
41. Идеал кольца. Примеры. Ядро гомоморфизма колец – идеал.
42. Факторкольцо.
43. Основная теорема о гомоморфизмах колец.
44. Прямое произведение колец.

45. Характеристика поля. Простое поле.
46. Степень расширения полей. Мультипликативность степени. Конечные расширения.
47. Алгебраические и трансцендентные элементы.
48. Простые расширения полей.
49. Алгебраически замкнутые поля, алгебраическое замыкание.
50. Конечные поля.

Примерный перечень вопросов к зачету

На зачете по дисциплине «Алгебра и теория чисел» студент должен продемонстрировать умение решать следующие задачи и объяснять свои действия с точки зрения теории.

3 семестр

1. Найти матрицу билинейной и квадратичной формы в разных базисах.
2. С помощью алгоритма Лагранжа найти канонический вид билинейной и квадратичной формы.
3. Привести вещественную и комплексную квадратичную форму к нормальному виду.
4. Найти положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатуру квадратичной формы.
5. Применять критерий Сильвестра для выяснения знакоопределенности квадратичной формы.
6. Уметь выяснить, является ли вещественное пространство евклидовым относительно заданной билинейной формы.
7. Уметь вычислить скалярное произведение векторов, длину векторов, угол между векторами.
8. Уметь строить ортонормированные семейства векторов с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта.
9. Уметь находить ортогональное дополнение к подпространству, заданному одним из двух способов: а) как линейная оболочка системы векторов; б) как пространство решений однородной системы линейных уравнений.
10. Уметь найти сопряженный оператор для заданного оператора.
11. Уметь находить канонический вид ортогонального оператора.
12. Уметь находить канонический вид самосопряженного оператора.
13. Уметь приводить вещественную квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования координат.
14. Уметь определять, является ли множество с заданными операциями группой, кольцом, полем.

15. Уметь определять, является ли заданное отображение гомоморфизмом групп, колец.
16. Уметь вычислить порядок элемента группы.
17. Уметь вычислить циклическую подгруппу, порожденную заданным элементом.
18. Уметь вычислять смежные классы группы по подгруппе, индекс подгруппы.
19. Знать и уметь применять теорему Лагранжа и следствия из нее.
20. Уметь определить, является ли заданная подгруппа нормальной.
21. Уметь выполнять действия в факторгруппе, факторкольце.
22. Уметь определять, является ли данное подмножество идеалом кольца.