**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

Учебно-методическое объединение по естественнонаучному образованию

**УТВЕРЖДЕНО**

Первым заместителем Министра образования

Республики Беларусь

А.Г. Бахановичем

**20.08.2024**

Регистрационный **№ 6-05-05-006/пр.**

**Алгебра и теория чисел**

**Примерная учебная программа по учебной дисциплине**

**для специальности**

**6-05-0533-06 Математика**

|  |  |
| --- | --- |
| **СОГЛАСОВАНО**  Председатель Учебно-методического  объединения по естественнонаучному  образованию  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Д.М. Курлович    \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | **СОГЛАСОВАНО**  Начальник Главного управления  профессионального образования  Министерства образования  Республики Беларусь  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ С.Н. Пищов    \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  **СОГЛАСОВАНО**  Проректор по научно-методической  работе Государственного учреждения образования ”Республиканский  институт высшей школы“  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ И.В. Титович    \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Эксперт-нормоконтролер |
|  | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_    \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |

Минск 2024

**СоставителИ:**

В.В. Беняш-Кривец, заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

И.И. Воронович, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

В.И. Каскевич, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

С.В. Тихонов, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

**Рецензенты:**

Кафедра алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» (протокол № 10 от 17.05.2023 г.);

А.А. Осиновская, старший научный сотрудник отдела алгебры государственного научного учреждения «Институт математики НАН Беларуси», кандидат физико-математических наук

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ПРИМЕРНОЙ:**

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета

(протокол № 10 от 18.05.2023);

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по естественнонаучному образованию

(протокол № 7 от 19.05.2023 г.);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета

(протокол № 9 от 29.06.2023 г.)

Ответственный за редакцию: С.В. Тихонов

Ответственный за выпуск: С.В. Тихонов

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Примерная учебная программа по учебной дисциплине «Алгебра и теория чисел»разработана для учреждений высшего образования в соответствии с требованиями образовательного стандарта общего высшего образования по специальности 6-05-0533-06 «Математика».

Учебная дисциплина «Алгебра и теория чисел» является базовой для преподавания большинства математических дисциплин. Цель дисциплины: изложить основы современных алгебры и теории чисел.

*Образовательная цель:*обучить студентов фундаментальным методам общей алгебры, линейной алгебры, теории чисел; ознакомить с основными алгебраическими структурами — группами, кольцами и полями; создать базу для освоения основных понятий и методов современной математики.

*Развивающая цель:*формирование у студентов основ математического мышления; знакомство с методами математических доказательств; изучение алгоритмов решения конкретных математических задач; привитие студентам умения самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

*Основные задачи*, решаемые в рамках изучения дисциплины:

1. ознакомить студентов с фундаментальными понятиями и методами линейной алгебры. Изучить матрицы и определители, методы решения систем линейных уравнений, теорию векторных пространств и линейных операторов, теорию квадратичных и билинейных форм;
2. дать введение в задачи и методы теории групп, теории колец и полей, а также теории чисел;
3. изучить комплексные числа и многочлены;
4. развить у студентов аналитическое мышление и общую математическую культуру;
5. привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Дисциплина «Алгебра и теория чисел» является базовой для преподавания большинства математических дисциплин. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики».

Освоение учебной дисциплины «Алгебра и теория чисел» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции:** применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

***знать:***

* основные понятия и результаты линейной алгебры, теории билинейных и квадратичных форм, теории групп, колец и полей;
* методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках учебной дисциплины «Алгебра и теория чисел»;
* алгоритмы решения задач по алгебре;

***уметь:***

* выполнять действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме, извлекать корни из комплексных чисел, применять формулу Муавра;
* вычислять определители;
* выполнять операции над матрицами;
* решать системы линейных уравнений;
* находить базис векторного пространства, суммы и пересечения подпространств, координаты вектора в заданном базисе, находить ранг матрицы и системы векторов;
* находить собственные значения и собственные векторы матрицы и линейного оператора;
* приводить квадратичную форму к каноническому виду;
* приводить ортогональный оператор к каноническому виду;
* находить ортонормированный базис, ортогональное дополнение к подпространству;
* определять, является ли данное подмножество подгруппой в группе, подкольцом или идеалом в кольце, подполем в поле;
* производить вычисления в факторгруппе, факторкольце;

***владеть:***

* основными навыками решения задач, связанных с линейной алгеброй, многочленами, комплексными числами, квадратичными и билинейными формами, группами, кольцами и полями;
* методами доказательств основных теорем, встречающихся в курсе «Алгебра и теория чисел».
* навыками самообразования и способами использования аппарата алгебры и теории чисел для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Воспитательное значение учебной дисциплины «Алгебра и теория чисел» заключается в формировании у обучающихся математической культуры и научного мировоззрения; развитии исследовательских умений, аналитических способностей, креативности, необходимых для решения научных и практических задач; развитии познавательных способностей и активности: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности; формировании способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Изучение данной учебной дисциплины способствует созданию условий для формирования интеллектуально развитой личности обучающегося, которой присущи стремление к профессиональному совершенствованию, активному участию в экономической и социально-культурной жизни страны, гражданская ответственность и патриотизм.

Всего на изучение учебной дисциплины отведено 318 часов, в том числе 212 аудиторных часов, из них: лекции – 106 часов, лабораторные занятия – 106 часов.

Рекомендуемые формы промежуточной аттестации – зачеты и экзамены.

**ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Наименование раздела, темы** | **Всего аудиторных часов** | **из них** | |
| **лекции** | **лабораторные** |
| 1. | Арифметика целых чисел. Сравнения | 18 | 8 | 10 |
| 2. | Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры | 5 | 3 | 2 |
| 3. | Поле комплексных чисел | 12 | 6 | 6 |
| 4. | Матрицы и операции над ними | 8 | 4 | 4 |
| 5. | Перестановки и подстановки | 5 | 3 | 2 |
| 6. | Определители и их применение | 12 | 6 | 6 |
| 7. | Многочлены от одной и нескольких переменных | 12 | 6 | 6 |
| 8. | Векторные пространства | 20 | 10 | 10 |
| 9. | Системы линейных уравнений | 12 | 6 | 6 |
| 10. | Линейные отображения векторных пространств | 16 | 8 | 8 |
| 11. | Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц | 20 | 10 | 10 |
| 12. | Билинейные и квадратичные формы | 16 | 8 | 8 |
| 13. | Евклидовы пространства | 12 | 6 | 6 |
| 14. | Линейные операторы евклидовых пространств | 12 | 6 | 6 |
| 15. | Введение в теорию групп | 16 | 8 | 8 |
| 16. | Введение в теорию колец и полей | 16 | 8 | 8 |
|  | **Итого:** | **212** | **106** | **106** |

**СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА**

|  |
| --- |
| **Тема 1. Арифметика целых чисел. Сравнения**  Делимость целых чисел и ее свойства. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Простые числа. Основная теорема арифметики. Сравнения и их свойства. Классы вычетов. Функция Эйлера. Решение линейных сравнений от одной неизвестной. Китайская теорема об остатках. |
| **Тема 2. Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры**  Понятие и свойства алгебраической операции. Определения группы, кольца, поля. Примеры. Кольцо классов вычетов. |
| **Тема 3. Поле комплексных чисел**  Алгебраическая форма комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы. |
| **Тема 4. Матрицы и операции над ними**  Понятие матрицы. Операции над матрицами: сложение и умножение матриц, умножение матрицы на скаляр, транспонирование. Свойства операций над матрицами. Многочлен от матрицы. |
| **Тема 5. Перестановки и подстановки**  Перестановки и подстановки. Инверсии и порядки в перестановке, четность перестановки. Транспозиции и циклы. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и произведение транспозиций, четность подстановки. Умножение подстановок и его свойства, симметрическая и знакопеременная группа. |
| **Тема 6. Определители и их применение**  Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства. Определитель транспонированной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Определитель Вандермонда. Определитель произведения квадратных матриц. Обратная матрица. Полная линейная группа. Теорема Крамера. |
| **Тема 7. Многочлены от одной и нескольких переменных**  Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена и ее свойства. Теорема о делении с остатком для многочленов. Наибольший общий делитель многочленов, алгоритм Евклида. Взаимно простые многочлены. Неприводимые многочлены. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители. Теорема Безу и следствия из нее. Схема Горнера. Производная многочлена и ее свойства. Кратность корня многочлена. Основная теорема алгебры.Каноническое разложение многочлена над полями комплексных и вещественных чисел. Многочлены от многих переменных. Симметрические многочлены.  **Тема 8. Векторные пространства**  Определение и примеры векторных пространств. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная независимость векторов. Теорема Штейница о замене. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора. Подпространство, его размерность. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей. Прямая сумма подпространств.  **Тема 9. Системы линейных уравнений**  Матричная запись линейной системы. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Однородные системы, условие существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Задание подпространства векторного пространства системой линейных уравнений.  **Тема 10. Линейные отображения векторных пространств**  Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект. Алгебраические действия над линейными отображениями: сумма, умножение на константу, композиция. Линейный оператор и его матрица. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов. Пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц. Условия обратимости оператора.  **Тема 11. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц**  Инвариантное подпространство. Сужение оператора на инвариантное подпространство. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Собственное число и собственный вектор оператора. Характеристический многочлен оператора и матрицы. Теорема Гамильтона–Кэли. Оператор, имеющий диагональную матрицу в некотором базисе; признак диагонализируемости. Жорданова матрица.  **Тема 12. Билинейные и квадратичные формы**  Билинейная форма на векторном пространстве, ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса, ранг формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы, их матрицы. Квадратичная форма и ее матрица, существование и единственность полярной билинейной формы. Канонический вид билинейной и квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.  **Тема 13. Евклидовы пространства**  Определение евклидова пространства. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение к подпространству. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора, расстояние от вектора до подпространства.  **Тема 14. Линейные операторы евклидовых пространств**  Сопряженный оператор, его существование и свойства. Инвариантные подпространства для сопряженных операторов. Ортогональные операторы, их свойства. Критерий ортогональности оператора. Разложение пространства в прямую сумму 1- и 2-мерных попарно ортогональных инвариантных относительно ортогонального оператора подпространств. Канонический вид матрицы ортогонального оператора. Самосопряженные операторы, их свойства. Канонический вид матрицы самосопряженного оператора. Существование ортогонального преобразования, приводящего вещественную квадратичную форму к диагональному виду.  **Тема 15. Введение в теорию групп**  Определение группы, подгруппы, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм. Порядок элемента группы. Циклические подгруппы. Циклические группы, их классификация. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальная подгруппа. Факторгруппа. Основная теорема о гомоморфизмах групп. Прямое произведение групп.  **Тема 16. Введение в теорию колец и полей**  Определение кольца, подкольца, поля, подполя, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм колец, ядро гомоморфизма. Идеалы колец. Факторкольца. Основная теорема о гомоморфизмах для колец. Прямое произведение колец. Характеристика поля. Простые поля. Степень расширения полей, конечные расширения. Мультипликативность степени. Алгебраические и трансцендентные элементы. Простые расширения полей. Алгебраически замкнутые поля, алгебраическое замыкание. Конечные поля. Число элементов в конечном поле. Существование и единственность поля из  элементов. |

**ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

**Основная литература**

1. Глухов, М.М. Алгебра: учебник для вузов / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 608 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/187793>.
2. Беняш-Кривец В.В. Лекции и семинары по алгебре: группы, кольца, поля. / В.В. Беняш-Кривец, Г.Е. Пунинский. – Минск: БГУ, – 2015. – 152 с. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/149209>.
3. Беняш-Кривец В.В. Лекции и семинары по алгебре: основные понятия алгебры и теории чисел. // В.В. Беняш-Кривец, Г.Е. Пунинский. – Минск: БГУ, 2015. 152 с. 116 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/149208>
4. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие для вузов / И. В. Проскуряков. – 16-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 476 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/183752>
5. Каргаполов, М. И. Основы теории групп: учебное пособие для вузов / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 288 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/238481>
6. Мартынов, Л. М. Алгебра и теория чисел для криптографии: учебное пособие для вузов / Л. М. Мартынов. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 456 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/189446>
7. Виноградов И. М. Основы теории чисел : учебное пособие [для вузов] / И.М. **Виноградов**. – Изд. 15-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2023. – 176 с. <https://e.lanbook.com/book/298499>

**Дополнительная литература**

1. **Винберг** Э.Б. Курс алгебры / Э. Б. **Винберг**. – Москва: Изд–во МЦНМО, 2019. – 592 с.
2. Милованов М.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 1. / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. Минск: Амалфея, 2001. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/13295>
3. Милованов М.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 2. / М.В. Милованов, М.М. Толкачев, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. Минск: Амалфея, 2001. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/13296>
4. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: Учеб. пособие для студ. мат. и физических спец. ун–тов / А. А. **Бурдун**, Е. А. Мурашко, М. М. Толкачев, А. С. Феденко ; Под ред. А. С. Феденко. – 2–е изд. – Минск: Універсітэцкае, 1999. – 302 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/13294>
5. Монахов В.С. Алгебра и теория чисел: практикум. // В.С. Монахов, А.В. Бузланов. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/13297>
6. Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре: учебник / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – 17-е изд.,стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 288 с. –Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210164>
7. Сборник задач по алгебре : Для студ. 1- 2 курсов матем. фак. ун-тов и пед. ин-тов / В. А. Артамонов, Ю. А. Бахтурин, Э. Б. Винберг и др.; Под ред. А.И. Кострикина. – Москва : Факториал : Просперус, 1995. – 454 с.
8. **Кострикин А.И.** Введение в алгебру: учебник для студ. ун-тов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика": [в 3 ч.]. Ч. 1: Основы алгебры / А. И. **Кострикин**. – Москва: Изд-во МЦНМО, 2022. – 271 с.
9. **Кострикин А.И.** Введение в алгебру: учебник для студ. ун-тов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика": [в 3 ч.]. Ч. 2: Линейная алгебра / А. И. **Кострикин**. – Новое издание. – Москва: Изд-во МЦНМО, 2022. – 367 с.
10. **Кострикин** А.И. Введение в алгебру: учебник для студ. ун-тов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика": [в 3 ч.]. Ч. 3: Основные структуры алгебры / А. И. **Кострикин**. – Москва: Изд-во МЦНМО, 2022. – 271 с.
11. Дыбкова, Е.В. Задачи по алгебре. Основы теории групп / Е.В. Дыбкова, И.Б. Жуков, А.А. Семенов, Р.А. Шмидт. – С.-Петербург: Изд-во С.-Петербургского университета, 1996. – 32 с.
12. Размыслович Г. П. Геометрия и алгебра. В 5-ти частях. Ч. 1: Матрицы, определители, системы линейных уравнений: пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики Г.П. Размыслович. – Минск: БГУ, 2010. – 73 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/2336>
13. Геометрия и алгебра : пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики : в 5 ч. Ч. 2 : Векторные пространства / Г. П. **Размыслович**; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. высшей математики. – Минск : БГУ, 2013. – 56 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/50318>
14. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра: учебные материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики. В 5 ч. Ч. 3. Линейные и билинейные отображения векторных пространств / Г. П. Размыслович. – Минск: БГУ, 2014. – 71 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/98210>
15. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра : учебные материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики. В 5 ч. Ч. 4. Полиномиальные и нормальные формы матриц. Евклидово и унитарное пространства / Г. П. Размыслович. – Минск: БГУ, 2014. – 65 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/105019>

**Перечень рекомендуемых средств диагностики**

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Контроль работы студента рекомендуется проводить в форме устного опроса, коллоквиума, выполнения контрольных, самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории. Задания к самостоятельным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Зачет по дисциплине рекомендуется выставлять в случае сдачи всех контрольных работ и коллоквиума.

**Рекомендуемые формы и методы обучения**

При организации образовательного процесса используются следующие **подходы и методы:**

***- эвристический,*** ориентированный на**:**

– осуществление студентами личностно-значимых открытий в процессе подготовки к лабораторным занятиям;

–творческую самореализацию студентов в процессе создания планов-конспектов лекций;

–индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

***- практико-ориентированный,*** предполагающий:

– освоение содержания образования через решения практических задач;

– приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

– использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;

***- метод группового обучения,*** который представляет собойформу организации учебно-познавательной деятельности студентов, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

**Методические рекомендации**

**по организации самостоятельной работы обучающихся**

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;

– работы, предусматривающие аналитическое решение задач и выполнение заданий лабораторных и практических занятий;

– выполнение домашних заданий;

– подготовка к лабораторным и практическим занятиям;

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов общего высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, экзамену, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

**Примерная тематика практических/лабораторных занятий**

1. Делимость целых чисел и ее свойства. Наибольший общий делитель.
2. Алгоритм Евклида. Простые числа. Основная теорема арифметики.
3. Сравнения и их свойства. Классы вычетов.
4. Функция Эйлера. Решение линейных сравнений от одной неизвестной. Китайская теорема об остатках.
5. Понятие и свойства алгебраической операции. Определения группы, кольца, поля. Кольцо классов вычетов.
6. Алгебраическая форма комплексных чисел.
7. Тригонометрическая форма комплексных чисел.
8. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы.
9. Операции над матрицами и их свойства. Многочлен от матрицы. Специальные виды матриц.
10. Перестановки и подстановки. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и произведение транспозиций, четность подстановки. Умножение подстановок и его свойства.
11. Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
12. Определитель Вандермонда. Обратная матрица. Теорема Крамера.
13. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Теорема о делении с остатком для многочленов. Наибольший общий делитель многочленов, алгоритм Евклида.
14. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители. Теорема Безу и следствия из нее. Схема Горнера. Производная многочлена и ее свойства. Кратность корня многочлена.
15. Основная теорема алгебры**.** Каноническое разложение многочлена над полями комплексных и вещественных чисел. Многочлены от многих переменных. Симметрические многочлены.
16. Определение и примеры векторных пространств. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная независимость векторов.
17. Теорема Штейница о замене. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса.
18. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора. Подпространство, его размерность.
19. Ранг системы векторов. Ранг матрицы.
20. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей. Прямая сумма подпространств.
21. Матричная запись линейной системы. Метод Гаусса. Однородные системы, условие существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений.
22. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Задание подпространства векторного пространства системой линейных уравнений.
23. Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект.
24. Алгебраические действия над линейными отображениями: сумма, умножение на константу, композиция. Линейный оператор и его матрица.
25. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов.
26. Пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц. Условия обратимости оператора.
27. Инвариантное подпространство. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств.
28. Собственное значение и собственный вектор оператора. Характеристический многочлен оператора и матрицы.
29. Теорема Гамильтона–Кэли. Оператор, имеющий диагональную матрицу в некотором базисе; признак диагонализируемости.
30. Жорданова матрица. Жорданова нормальная форма матрицы.
31. Билинейная форма на векторном пространстве, ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса, ранг формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы, их матрицы.
32. Квадратичная форма и ее матрица, существование и единственность полярной билинейной формы. Канонический вид билинейной и квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
33. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.
34. Определение евклидова пространства. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши–Буняковского.
35. Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение к подпространству.
36. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора, расстояние от вектора до подпространства.
37. Сопряженный оператор, его существование и свойства. Ортогональные операторы, их свойства. Критерий ортогональности оператора.
38. Канонический вид матрицы ортогонального оператора. Самосопряженные операторы, их свойства. Канонический вид матрицы самосопряженного оператора.
39. Определение группы, подгруппы, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм.
40. Порядок элемента группы. Циклические подгруппы. Циклические группы, их классификация. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы.
41. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальная подгруппа. Факторгруппа.
42. Основная теорема о гомоморфизмах групп. Прямое произведение групп.
43. Определение кольца, подкольца, поля, подполя, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм колец, ядро гомоморфизма.
44. Идеалы колец. Факторкольца. Основная теорема о гомоморфизмах для колец. Прямое произведение колец.
45. Степень расширения полей. Алгебраические и трансцендентные элементы. Простые расширения полей.

**Примерный перечень вопросов к экзамену**

1. Свойства делимости целых чисел. Теорема о делении с остатком. НОД целых чисел. Алгоритм Евклида.
2. Теорема о представлении НОД целых чисел в виде целочисленной линейной комбинации. Нахождение НОД нескольких целых чисел.
3. Взаимно простые числа. Критерий взаимной простоты. НОК целых чисел.
4. Простые числа, их свойства. Основная теорема арифметики.
5. Сравнения и их свойства.
6. Классы вычетов по модулю n, их свойства. Полная система вычетов.
7. Функция Эйлера, ее мультипликативность и вычисление.
8. Теоремы Эйлера и Ферма.
9. Решение линейных сравнений.
10. Алгебраическая операция, ее свойства. Примеры. Ассоциативность.
11. Теоремы о нейтральном и обратном элементе.
12. Группа, кольцо, поле. Определения и примеры.
13. Кольцо классов вычетов *Zm.*
14. Обратимые элементы в Zm. Критерий того, что *Zm* — поле.
15. Определение комплексных чисел, операции сложения и умножения и их свойства. Алгебраическая форма комплексных чисел.
16. Операция сопряжения комплексных чисел и ее свойства.
17. Комплексная плоскость, тригонометрическая форма комплексных чисел. Модуль комплексного числа, его свойства.
18. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
19. Геометрическая интерпретация действий над комплексными числами.
20. Извлечение корней из комплексных чисел.
21. Корни из единицы. Первообразные корни из единицы и их свойства.
22. Определения перестановок и подстановок, их число. Транспозиции и циклы. Четность перестановки.
23. Теорема о характере четности перестановки после применения к ней транспозиции.
24. Умножение подстановок. Симметрическая группа.
25. Разложение подстановки в произведение транспозиций.
26. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
27. Матрицы и действия над ними. Умножение матрицы на число и его свойства.
28. Свойства сложения матриц. Операция транспонирования и ее свойства.
29. Свойства умножения матриц.
30. Определители. Теорема о замене строк в определителе.
31. Свойства определителей порядка *n*.
32. Теорема об определителе произведения матриц.
33. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
34. Теорема о разложении определителя по строке.
35. Определитель Вандермонда.
36. Обратная матрица. Критерий существования и методы вычисления.
37. Свойства обратной матрицы.
38. Системы линейных уравнений. Метод Крамера.
39. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.
40. Кольцо многочленов от одной переменной. Степень многочлена и ее свойства.
41. Теорема о делении многочленов с остатком.
42. Делимость многочленов и ее свойства. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
43. Теорема о представлении НОД многочленов в виде линейной комбинации. Взаимно простые многочлены. Критерий взаимной простоты.
44. Неприводимые многочлены и их свойства.
45. Разложение многочлена на неприводимые множители.
46. Кратные множители многочлена.
47. Корни многочленов. Теорема Безу и ее следствия. Кратные корни.
48. Схема Горнера.
49. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
50. Неприводимые многочлены над *C* и R. Каноническое разложение многочленов из C[x] и R[x].
51. Векторные пространства. Определение и примеры. Простейшие свойства векторных пространств.
52. Линейная зависимость и линейная независимость. Примеры. Свойства линейной зависимости. Критерии линейной зависимости.
53. Базис векторного пространства. Примеры.
54. Эквивалентные системы векторов. Лемма Штейница.
55. Размерность векторного пространства. Свойства *n*-мерных векторных пространств.
56. Координаты вектора. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода.
57. Элементарные преобразования систем векторов.
58. Изоморфизмы векторных пространств и их свойства. Критерий изоморфности векторных пространств*.*
59. Подпространства векторного пространства. Примеры
60. Операции над подпространствами.
61. Размерности суммы и пересечения подпространств.
62. Прямая сумма подпространств. Критерии.
63. Прямое дополнение.
64. Базис и ранг системы векторов. Ранг матрицы.
65. Теорема о ранге матриц.
66. Ранг произведения двух матриц.
67. Методы вычисления ранга матрицы.
68. Критерий совместности системы линейных уравнений.
69. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
70. Задание подпространства системой уравнений. Связь решений однородной и неоднородной систем.
71. Линейные отображения. Примеры.
72. Простейшие свойства линейных отображений.
73. Теорема о продолжении отображения базиса.
74. Действия над линейными отображениями.
75. Матрица линейного оператора.
76. Матрица суммы и произведения операторов.
77. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
78. Ядро и образ и линейного отображения.
79. Нахождение ядра линейного оператора. Теорема о ранге и дефекте.
80. Инвариантные подпространства. Определение и примеры.
81. Сумма и пересечение инвариантных подпространств. Инвариантные подпространства и матрица линейного оператора.
82. Собственные векторы и собственные значения. Определения и примеры.
83. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Подпространство Vλ.
84. Нахождение собственных значений.
85. Теорема Гамильтона–Кэли.
86. Минимальный полином матрицы и оператора.
87. Определение жордановой нормальной формы и канонического базиса. Нахождение ЖНФ матрицы.
88. Билинейные формы. Примеры. Матрица билинейной формы. Симметрические билинейные формы и их матрицы.
89. Теорема об изменении матрицы билинейной формы при переходе к другому базису. Ранг билинейной формы и его независимость от выбора базиса.
90. Квадратичные формы. Полярная билинейная форма для данной квадратичной формы. Теорема о существовании и единственности полярной билинейной формы
91. Матрица квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису. Ранг квадратичной формы и его независимость от выбора базиса.
92. Канонический базис относительно билинейной (квадратичной) формы и канонический вид билинейной (квадратичной) формы. Матрица билинейной (квадратичной) формы в каноническом базисе. Алгоритм Лагранжа.
93. Нормальный вид комплексной квадратичный формы.
94. Нормальный вид действительной квадратичной формы. Закон инерции действительных квадратичных форм. Положительный и отрицательный индексы инерции.
95. Знакоопределенные квадратичные формы. Канонический вид положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра.
96. Евклидовы пространства. Длина вектора.
97. Неравенство Коши-Буняковского.
98. Неравенство треугольника. Угол между векторами в евклидовом пространстве.
99. Ортогональные векторы в евклидовом (унитарном) пространстве и их свойства. Теорема о линейной независимости системы попарно ортогональных ненулевых векторов.
100. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение к подпространству. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
101. Теорема о разложении евклидова векторного пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
102. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства, их нахождение.
103. Связь между ортонормированными базисами евклидова векторного пространства.
104. Оператор, сопряженный к данному оператору евклидова пространства. Теорема о существовании и единственности сопряженного оператора. Матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе.
105. Свойства сопряженного оператора пространства. Теорема об инвариантных подпространствах.
106. Ортогональные операторы. Невырожденность ортогонального оператора. Образ ортонормированного базиса относительно ортогонального оператора.
107. Критерий ортогональности оператора. Матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе.
108. Инвариантные подпространства ортогонального оператора.
109. Собственные значения ортогонального оператора. Ортогональные операторы 1- и 2-мерных векторных пространств.
110. Теорема о каноническом виде матрицы ортогонального оператора. Следствие для ортогональных матриц.
111. Самосопряженные операторы евклидовых векторных пространств. Матрица самосопряженного оператора. Свойство ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно самосопряженного оператора.
112. Теорема об одномерном подпространстве, инвариантном относительно самосопряженного оператора евклидова векторного пространства. Следствия.
113. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора. Следствие для симметрических матриц.
114. Приведение действительной квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования координат.
115. Определение группы, подгруппы. Примеры*.*
116. Порядок элементов группы, его свойства. Циклические подгруппы, их порядок.
117. Циклические группы. Их классификация.
118. Подгруппы циклической группы.
119. Смежные классы. Их свойства. Критерий равенства смежных классов. Индекс подгруппы.
120. Теорема Лагранжа и следствия из нее.
121. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп, их свойства.
122. Нормальные подгруппы. Примеры. Нормальность ядра гомоморфизма.
123. Факторгруппа. Канонический гомоморфизм.
124. Основная теорема о гомоморфизмах групп.
125. Прямое произведение групп.
126. Определения кольца, подкольца, поля, подполя. Примеры.
127. Гомоморфизм и изоморфизм колец. Их свойства. Ядро гомоморфизма.
128. Идеал кольца. Примеры. Ядро гомоморфизма колец – идеал.
129. Факторкольцо.
130. Основная теорема о гомоморфизмах колец.
131. Прямое произведение колец.
132. Характеристика поля. Простое поле.
133. Степень расширения полей. Мультипликативность степени. Конечные расширения.
134. Алгебраические и трансцендентные элементы.
135. Простые расширения полей.
136. Алгебраически замкнутые поля, алгебраическое замыкание.
137. Конечные поля.

**Примерный перечень вопросов к зачету**

На зачете по дисциплине «Алгебра и теория чисел» студент должен продемонстрировать умение решать следующие задачи и объяснять свои действия с точки зрения теории.

1. Найти матрицу билинейной и квадратичной формы в разных базисах.
2. С помощью алгоритма Лагранжа найти канонический вид билинейной и квадратичной формы.
3. Привести вещественную и комплексную квадратичную форму к нормальному виду.
4. Найти положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатуру квадратичной формы.
5. Применять критерий Сильвестра для выяснения знакоопределенности квадратичной формы.
6. Уметь выяснить, является ли вещественное пространство евклидовым относительно заданной билинейной формы.
7. Уметь вычислить скалярное произведение векторов, длину векторов, угол между векторами.
8. Уметь строить ортонормированные семейства векторов с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта.
9. Уметь находить ортогональное дополнение к подпространству, заданному одним из двух способов: а) как линейная оболочка системы векторов; б) как пространство решений однородной системы линейных уравнений.
10. Уметь найти сопряженный оператор для заданного оператора.
11. Уметь находить канонический вид ортогонального оператора.
12. Уметь находить канонический вид самосопряженного оператора.
13. Уметь приводить вещественную квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования координат.
14. Уметь определять, является ли множество с заданными операциями группой, кольцом, полем.
15. Уметь определять, является ли заданное отображение гомоморфизмом групп, колец.
16. Уметь вычислить порядок элемента группы.
17. Уметь вычислить циклическую подгруппу, порожденную заданным элементом.
18. Уметь вычислять смежные классы группы по подгруппе, индекс подгруппы.
19. Знать и уметь применять теорему Лагранжа и следствия из нее.
20. Уметь определить, является ли заданная подгруппа нормальной.
21. Уметь выполнять действия в факторгруппе, факторкольце.
22. Уметь определять, является ли данное подмножество идеалом кольца.